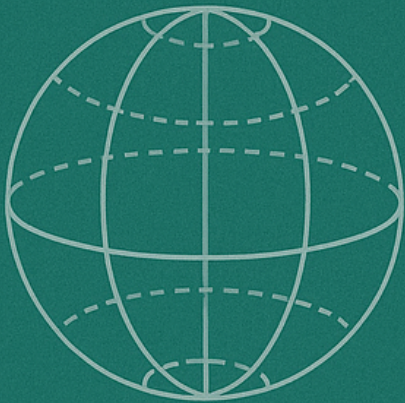


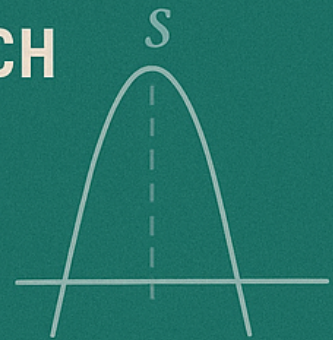
MATEMÁTICA 2

$\frac{dy}{dx}$ PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL

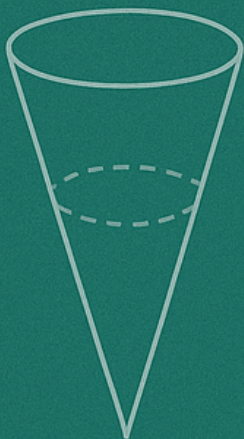
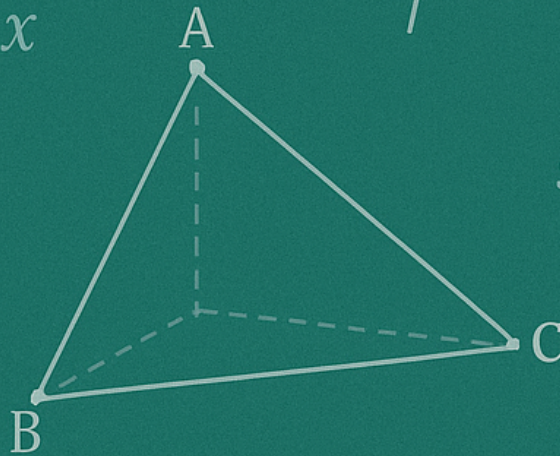
$\frac{\partial z}{\partial x}$ JORDI ORDOÑEZ ADELLACH
Septiembre 2026



$$\ln x$$

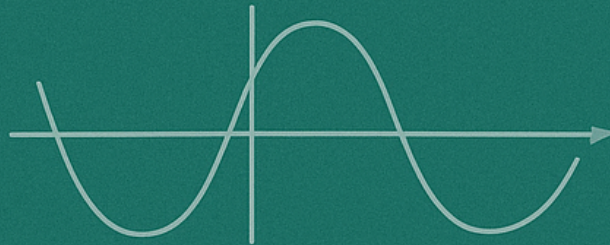


$$s = x$$



$$\ln x$$

$$y = \cos x$$



$$anx + a_1$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_4 \\ a_3 & a \end{bmatrix}$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a_1x + a_1 = 0$$

Matemática 2 para la Ingeniería Industrial

Manual de apoyo para estudiantes de la Universidad Carlemany

Autor: Jordi Ordóñez Adellach

Edición Septiembre 2026

(1.^a edición: agosto de 2025)

Serie completa (del mismo autor):

- Matemática 1 para la Ingeniería Industrial
- Matemática 2 para la Ingeniería Industrial
- Ejercicios Básicos de Matemática 1 para la Ingeniería Industrial
- Ejercicios Básicos de Matemática 2 para la Ingeniería Industrial

© 2025–2026 Jordi Ordóñez Adellach

Este manual se distribuye bajo licencia **Creative Commons Atribución – No Comercial – Compartir Igual (CC BY-NC-SA 4.0)**.

Se permite copiar, redistribuir y adaptar el material con reconocimiento de autoría, siempre que no se haga un uso comercial y las obras derivadas se compartan con la misma licencia.

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Índice general

Introducción	1
Presentación del manual	1
Sobre el autor	2
1 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES	3
1.1 LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN LA INDUSTRIA	3
1.1.1 ¿Por qué son esenciales en la industria?	3
1.2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES	3
1.2.1 Definición de Ecuación Diferencial	3
1.2.2 Orden de una Ecuación Diferencial	4
1.2.3 Tipos de Soluciones	4
1.2.4 Verificación de Soluciones	4
1.3 CLASIFICACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES	4
1.3.1 Según la Linealidad	4
1.3.2 Homogéneas vs No Homogéneas	5
1.4 ECUACIONES DE VARIABLES SEPARABLES	5
1.4.1 Forma General	5
1.4.2 Método de Solución	6
1.4.3 Ejemplos Básicos	6
1.5 ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN	7
1.5.1 Forma Estándar	7
1.5.2 Factor Integrante	7
1.5.3 Método de Solución	7
1.5.4 Ejemplos Básicos	7
1.6 MODELOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO	8
1.6.1 Modelo Exponencial Básico	8
1.6.2 Aplicaciones del Modelo Exponencial	8
1.6.3 Interés Compuesto Continuo	9
1.7 CAMPOS DE DIRECCIONES	9
1.7.1 Concepto Básico	9
1.7.2 Construcción del Campo	10
1.7.3 Ejemplo Básico	10
1.7.4 Isoclinas	10
1.7.5 Interpretación Física	10
1.8 EJERCICIOS BÁSICOS FUNDAMENTALES	13
1.8.1 Ejercicio Básico 1: Verificación de Soluciones	13

1.8.2	Ejercicio Básico 2: Variables Separables	13
1.8.3	Ejercicio Básico 3: Ecuación Lineal	13
1.8.4	Ejercicio Básico 4: Crecimiento Exponencial	14
1.8.5	Ejercicio Básico 5: Campo de Direcciones	14
1.9	APLICACIONES INDUSTRIALES	15
1.9.1	Control de Temperatura en Procesos Industriales	15
1.9.2	Reactores Químicos de Primer Orden	15
1.9.3	Circuitos RC	16
1.9.4	Dinámica de Poblaciones Microbianas	16
1.9.5	Control de Nivel en Tanques	17
1.10	CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS	17
2	FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA	19
2.1	EL ANÁLISIS COMPLEJO EN LA INGENIERÍA	19
2.1.1	¿Por qué son fundamentales en la industria?	19
2.2	FUNCIONES COMPLEJAS Y CONTINUIDAD	19
2.2.1	Definición de Función Compleja	19
2.2.2	Límites y Continuidad	20
2.2.3	Propiedades de Continuidad	20
2.3	DIFERENCIABILIDAD COMPLEJA Y CONDICIONES DE CAUCHY-RIEMANN	20
2.3.1	Derivada Compleja	20
2.3.2	Condiciones de Cauchy-Riemann	21
2.3.3	Ejemplos de Verificación	21
2.3.4	Fórmula para la Derivada	21
2.4	FUNCIONES ANALÍTICAS	22
2.4.1	Definición	22
2.4.2	Propiedades Fundamentales	22
2.4.3	Funciones Elementales Analíticas	23
2.4.4	Series de Potencias	23
2.5	FUNCIONES ARMÓNICAS	24
2.5.1	Definición	24
2.5.2	Relación con Funciones Analíticas	24
2.5.3	Ejemplos Básicos	24
2.5.4	Funciones Conjugadas Armónicas	24
2.6	INTEGRACIÓN EN EL PLANO COMPLEJO	25
2.6.1	Integrales de Línea	25
2.6.2	Ejemplos Básicos	25
2.6.3	Propiedades de la Integración	25
2.6.4	Estimación de Integrales	25
2.7	TEOREMA DE CAUCHY Y FÓRMULA INTEGRAL	25
2.7.1	Teorema de Cauchy	25
2.7.2	Fórmula Integral de Cauchy	26
2.7.3	Ejemplos de Aplicación	26
2.7.4	Fórmula para Derivadas	27
2.8	SERIES DE LAURENT Y SINGULARIDADES	27

2.8.1	Series de Laurent	27
2.8.2	Clasificación de Singularidades	27
2.8.3	Ejemplos de Clasificación	27
2.8.4	Teorema del Residuo	28
2.9	EJERCICIOS BÁSICOS FUNDAMENTALES	28
2.9.1	Ejercicio Básico 1: Condiciones de Cauchy-Riemann	28
2.9.2	Ejercicio Básico 2: Función Armónica	28
2.9.3	Ejercicio Básico 3: Integral de Línea	29
2.9.4	Ejercicio Básico 4: Teorema del Residuo	29
2.9.5	Ejercicio Básico 5: Serie de Laurent	30
2.10	APLICACIONES INDUSTRIALES	30
2.10.1	Análisis de Estabilidad en Sistemas de Control	30
2.10.2	Análisis de Señales y Filtros	31
2.10.3	Potencial Complejo en Mecánica de Fluidos	31
2.10.4	Análisis de Campos Electromagnéticos	32
2.10.5	Transformaciones Conformes en Transferencia de Calor	32
2.10.6	Análisis de Oscilaciones en Estructuras	33
2.11	CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS	33
3	ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR	35
3.1	ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR EN LA INDUSTRIA	35
3.1.1	¿Por qué necesitamos ecuaciones de orden superior?	35
3.2	PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN	35
3.2.1	Ecuaciones Lineales de Orden Superior	35
3.2.2	Teorema del Principio de Superposición	35
3.3	DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL	36
3.3.1	Definiciones	36
3.3.2	El Wronskiano	36
3.4	ECUACIONES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES	37
3.4.1	Ecuación Característica	37
3.4.2	Casos de Solución	37
3.5	ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS: MÉTODOS DE SOLUCIÓN	38
3.5.1	Estructura de la Solución	38
3.5.2	Método de Coeficientes Indeterminados	38
3.5.3	Método de Variación de Parámetros	38
3.6	TRANSFORMADA DE LAPLACE	39
3.6.1	Definición	39
3.6.2	Transformadas Básicas	39
3.6.3	Aplicación a Ecuaciones Diferenciales	39
3.7	APLICACIONES INDUSTRIALES	40
3.7.1	Sistemas de Suspensión Automotriz	40
3.7.2	Vibraciones en Maquinaria	40
3.7.3	Circuitos Eléctricos RLC	40
3.8	EJERCICIOS BÁSICOS FUNDAMENTALES	41
3.8.1	Ejercicio Básico 1: Verificación de Soluciones	41

3.8.2	Ejercicio Básico 2: Wronskiano	41
3.8.3	Ejercicio Básico 3: Ecuación Característica	41
3.8.4	Ejercicio Básico 4: Transformada de Laplace	42
3.8.5	Ejercicio Básico 5: Coeficientes Indeterminados	42
3.9	EJERCICIOS PRÁCTICOS INDUSTRIALES	42
3.9.1	Ejercicio 1: Sistema de Suspensión Automotriz	42
3.9.2	Ejercicio 2: Circuito RLC	43
3.9.3	Ejercicio 3: Vibraciones en Maquinaria	43
3.10	CASOS DE ESTUDIO INDUSTRIAL	44
3.10.1	Caso 1: Control de Vibraciones en Edificios	44
3.10.2	Caso 2: Optimización de Suspensión en Vehículo de Carga	45
3.10.3	Caso 3: Sistema de Control de Grúa Torre	45
3.11	CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS	46
4	SERIES DE FOURIER Y ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES	49
4.1	ANÁLISIS FRECUENCIAL EN LA INDUSTRIA	49
4.1.1	¿Por qué necesitamos series de Fourier en la industria?	49
4.1.2	¿Por qué estudiamos ecuaciones diferenciales parciales?	49
4.2	FUNCIONES ORTOGONALES	50
4.2.1	Producto Interno de Funciones	50
4.2.2	Ortogonalidad	50
4.2.3	Conjuntos Ortonormales	50
4.3	SERIES DE FOURIER	51
4.3.1	Serie de Fourier Trigonométrica	51
4.3.2	Serie de Fourier para Período Arbitrario	51
4.4	INTRODUCCIÓN A ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES	52
4.4.1	Definición y Clasificación	52
4.4.2	Clasificación por Tipo	53
4.4.3	Ecuaciones Importantes en Ingeniería	53
4.5	MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS	53
4.5.1	Aproximaciones de Diferencias Finitas	53
4.5.2	Discretización del Dominio	54
4.6	ECUACIONES PARABÓLICAS: TRANSFERENCIA DE CALOR	54
4.6.1	Ecuación del Calor en 1D	54
4.6.2	Esquema Explícito de Diferencias Finitas	54
4.7	ECUACIONES ELÍPTICAS: DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURA	55
4.7.1	Ecuación de Laplace en 2D	55
4.7.2	Esquema de Diferencias Finitas	55
4.8	EJERCICIOS BÁSICOS FUNDAMENTALES	56
4.8.1	Ejercicio Básico 1: Ortogonalidad de Funciones	56
4.8.2	Ejercicio Básico 2: Coeficientes de Fourier	57
4.8.3	Ejercicio Básico 3: Diferencias Finitas	57
4.8.4	Ejercicio Básico 4: Ecuación del Calor	58
4.8.5	Ejercicio Básico 5: Ecuación de Laplace	58
4.9	EJERCICIOS PRÁCTICOS INDUSTRIALES	58

4.9.1	Ejercicio 1: Análisis de Vibraciones en Maquinaria	58
4.9.2	Ejercicio 2: Transferencia de Calor en Tratamiento Térmico	59
4.9.3	Ejercicio 3: Distribución de Temperatura en Soldadura	60
4.10	CASOS DE ESTUDIO INDUSTRIAL	62
4.10.1	Caso 1: Optimización de Enfriamiento en Fundición	62
4.10.2	Caso 2: Análisis de Calidad en Soldadura por Láser	63
4.10.3	Caso 3: Control Térmico en Procesamiento de Semiconductores	64
4.11	CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS	66
5	INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS NUMÉRICO	67
5.1	LOS CÁLCULOS NUMÉRICOS EN LA INDUSTRIA	67
5.1.1	¿Por qué necesitamos análisis numérico en la industria?	67
5.1.2	La importancia de la precisión controlada	67
5.2	FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS DE ERRORES	67
5.2.1	Tipos de Error	67
5.2.2	Propagación de Errores	68
5.2.3	Casos Críticos	68
5.3	MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ECUACIONES NO LINEALES	69
5.3.1	Método de la Bisección	69
5.3.2	Método de Newton	69
5.4	INTEGRACIÓN NUMÉRICA	71
5.4.1	Fórmula de los Trapecios	71
5.4.2	Fórmula de Simpson	72
5.5	ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS	72
5.5.1	Método de Euler	72
5.5.2	Método de Runge-Kutta de 4to Orden	72
5.6	ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES	74
5.6.1	Aproximaciones por Diferencias Finitas	74
5.6.2	Ecuación del Calor (Tipo Parabólico)	74
5.7	EJERCICIOS BÁSICOS FUNDAMENTALES	75
5.7.1	Ejercicio Básico 1: Análisis de Error	75
5.7.2	Ejercicio Básico 2: Método de la Bisección	75
5.7.3	Ejercicio Básico 3: Integración Numérica	75
5.7.4	Ejercicio Básico 4: Método de Euler	76
5.7.5	Ejercicio Básico 5: Diferencias Finitas	76
5.8	APLICACIONES INDUSTRIALES	76
5.8.1	Simulación Térmica en Hornos Industriales	76
5.8.2	Análisis de Vibraciones en Estructuras	77
5.8.3	Control de Procesos Químicos	77
5.8.4	Optimización de Intercambiadores de Calor	77
5.9	CASOS DE ESTUDIO INDUSTRIAL	78
5.9.1	Caso 1: Diseño de un Sistema de Refrigeración	78
5.9.2	Caso 2: Análisis de Fatiga en Turbina Eólica	78
5.9.3	Caso 3: Optimización de Proceso de Destilación	79
5.10	CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS	80

6	ARITMÉTICA MODULAR	83
6.1	LA ARITMÉTICA MODULAR EN SISTEMAS DIGITALES	83
6.1.1	¿Por qué es esencial en la industria tecnológica?	83
6.2	CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE CONGRUENCIAS	83
6.2.1	Definición de Congruencia	83
6.2.2	Ejemplos Básicos	83
6.2.3	Propiedades de las Congruencias	84
6.2.4	Clases de Equivalencia	84
6.3	OPERACIONES EN ARITMÉTICA MODULAR	84
6.3.1	Suma Modular	84
6.3.2	Multiplicación Modular	84
6.3.3	Exponenciación Modular Rápida	85
6.4	EL ALGORITMO EXTENDIDO DE EUCLIDES	85
6.4.1	Algoritmo de Euclides Clásico	85
6.4.2	Algoritmo Extendido de Euclides	86
6.4.3	Verificación	86
6.5	ECUACIONES DIOFÁNTICAS LINEALES	86
6.5.1	Definición	86
6.5.2	Condición de Existencia	86
6.5.3	Método de Solución	86
6.5.4	Ejemplo Completo	87
6.6	ECUACIONES EN CONGRUENCIAS LINEALES	87
6.6.1	Forma General	87
6.6.2	Condición de Solución	87
6.6.3	Número de Soluciones	87
6.6.4	Método de Solución	88
6.6.5	Ejemplo Práctico	88
6.7	EL ANILLO DE LOS ENTEROS MÓDULO n	88
6.7.1	Definición del Conjunto $\mathbb{Z}_n$	88
6.7.2	Operaciones en $\mathbb{Z}_n$	88
6.7.3	Propiedades Algebraicas	89
6.7.4	Elementos Invertibles	89
6.7.5	Función de Euler	89
6.8	EJERCICIOS BÁSICOS FUNDAMENTALES	90
6.8.1	Ejercicio Básico 1: Verificación de Congruencias	90
6.8.2	Ejercicio Básico 2: Operaciones Modulares	90
6.8.3	Ejercicio Básico 3: Ecuación Diofántica	90
6.8.4	Ejercicio Básico 4: Congruencia Lineal	91
6.8.5	Ejercicio Básico 5: Función de Euler	91
6.9	APLICACIONES INDUSTRIALES	91
6.9.1	Códigos de Verificación en Sistemas Digitales	91
6.9.2	Criptografía RSA Básica	91
6.9.3	Sistemas de Control de Acceso por Tarjetas	92
6.9.4	Detección de Errores en Transmisión de Datos	92
6.9.5	Algoritmos de Planificación Circular (Round Robin)	93

6.9.6	Sistemas de Calendario y Fechas	93
6.9.7	Generación de Números Pseudoaleatorios	94
6.10	CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS	94
7	TEORÍA DE GRAFOS	97
7.1	LAS MATEMÁTICAS DE LAS CONEXIONES	97
7.1.1	¿Por qué necesitamos teoría de grafos en la industria?	97
7.2	CONCEPTOS BÁSICOS DE GRAFOS	97
7.2.1	Definición de Grafo	97
7.2.2	Tipos de Grafos	98
7.2.3	Conceptos Fundamentales	99
7.3	REPRESENTACIÓN DE GRAFOS	100
7.3.1	Matriz de Adyacencia	100
7.3.2	Lista de Adyacencia	101
7.3.3	Grafos Ponderados	102
7.4	CAMINOS Y CONECTIVIDAD	102
7.4.1	Definiciones Fundamentales	102
7.4.2	Algoritmos de Búsqueda	103
7.5	Búsqueda en Anchura (BFS)	103
7.5.1	Algoritmo BFS paso a paso:	103
7.5.2	Ejemplo detallado paso a paso:	103
7.6	Búsqueda en Profundidad (DFS)	104
7.6.1	Implementación recursiva:	104
7.6.2	Ejemplo detallado paso a paso:	104
7.7	Conectividad	105
7.7.1	¿Qué es una Componente Conexa?	105
7.7.2	Algoritmo para encontrar componentes:	105
7.7.3	Ejemplo numérico completo:	105
7.7.4	Propiedades importantes:	107
7.8	ÁRBOLES Y ALGORITMOS DE BÚSQUEDA	107
7.8.1	Definición de Árboles	107
7.8.2	Árboles de Expansión Mínima	107
7.8.3	Caminos Mínimos	110
7.9	GRAFOS PLANOS Y COLORACIÓN	112
7.9.1	Grafos Planos	112
7.9.2	Coloración de Grafos	112
7.9.3	Teorema de los Cuatro Colores	113
7.10	REDES Y FLUJOS MÁXIMOS	115
7.10.1	Redes de Flujo	115
7.10.2	Algoritmo de Ford-Fulkerson	116
7.10.3	Teorema de Corte Mínimo - Flujo Máximo	117
7.11	APLICACIONES INDUSTRIALES	117
7.11.1	Optimización de Redes de Distribución	117
7.11.2	Planificación de Proyectos (CPM)	118
7.11.3	Análisis de Redes de Suministro	118

7.11.4	Optimización de Redes de Comunicación	119
7.11.5	Análisis de Flujo en Procesos Industriales	119
7.12	CASOS DE ESTUDIO INDUSTRIAL	120
7.12.1	Caso 1: Optimización de Rutas de Mantenimiento	120
7.12.2	Caso 2: Diseño de Red de Fibra Óptica	121
7.12.3	Caso 3: Optimización de Flujo de Producción	122
7.12.4	Caso 4: Planificación de Turnos en Centro de Llamadas	123
7.13	CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS	125
8	INTEGRACIÓN Y SÍNTESIS DE MATEMÁTICAS II	127
8.1	LA SÍNTESIS MATEMÁTICA EN LA INDUSTRIA	127
8.1.1	¿Por qué es esencial la integración matemática?	127
8.2	TRANSFORMADAS INTEGRALES: FOURIER Y LAPLACE	127
8.2.1	Revisión de la Transformada de Laplace	127
8.2.2	Series de Fourier	128
8.2.3	Transformada de Fourier	128
8.3	FUNCIONES ORTOGONALES Y SERIES	129
8.3.1	Concepto de Ortogonalidad de Funciones	129
8.3.2	Sistemas Ortogonales Completos	129
8.3.3	Aplicaciones en Resolución de EDPs	129
8.4	VARIABLE COMPLEJA APLICADA A EDPs	130
8.4.1	Ecuaciones de Cauchy-Riemann	130
8.4.2	Funciones Armónicas	130
8.4.3	Transformaciones Conformes	130
8.4.4	Aplicación a Problemas de Flujo	130
8.5	MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS PARA EDPs	131
8.5.1	Clasificación de EDPs	131
8.5.2	Diferencias Finitas para EDPs Parabólicas	131
8.5.3	Diferencias Finitas para EDPs Elípticas	131
8.5.4	Diferencias Finitas para EDPs Hiperbólicas	132
8.6	CONEXIONES INTERDISCIPLINARIAS	132
8.6.1	Física - Matemáticas	132
8.6.2	Ingeniería - Matemáticas	132
8.6.3	Economía - Matemáticas	133
8.7	MODELADO MATEMÁTICO INTEGRAL	133
8.7.1	Metodología del Modelado Integral	133
8.7.2	Ejemplo Integral: Sistema Térmico-Fluido	133
8.8	EJERCICIOS BÁSICOS FUNDAMENTALES	134
8.8.1	Ejercicio Básico 1: Transformada de Laplace	134
8.8.2	Ejercicio Básico 2: Serie de Fourier	134
8.8.3	Ejercicio Básico 3: Funciones Armónicas	134
8.8.4	Ejercicio Básico 4: Diferencias Finitas	135
8.8.5	Ejercicio Básico 5: Transformaciones Conformes	135
8.9	APLICACIONES INDUSTRIALES AVANZADAS	136
8.9.1	Diseño de Sistemas de Control Térmico	136

8.9.2	Análisis Modal de Estructuras	136
8.9.3	Procesamiento Digital de Señales	137
8.9.4	Modelado de Transferencia de Calor en Intercambiadores	138
8.9.5	Análisis de Estabilidad de Sistemas Dinámicos	139
8.10	CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS	140
	BIBLIOGRAFÍA	143

Introducción

Presentación del manual

Este manual continúa el camino iniciado en Matemática 1. Si allí el objetivo fue aprender a leer la realidad en el lenguaje de las matemáticas, ahora la meta es más ambiciosa: aprender a modelar, transformar y resolver esa realidad con herramientas matemáticas de mayor alcance.

En ingeniería, los problemas rara vez se reducen a fórmulas elementales. La estabilidad de una estructura, la propagación del calor, el flujo de información digital o la optimización de un proceso industrial, todos requieren traducirse a sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones diferenciales, aproximaciones numéricas y análisis en el plano complejo. Estas son las piezas centrales de este libro.

El énfasis sigue siendo práctico: no se trata de coleccionar demostraciones exhaustivas, sino de reconocer patrones, saber elegir el método adecuado y aplicar la teoría a contextos industriales. En este sentido, Matemática 2 debe verse como un taller: un espacio para ejercitar con modelos, algoritmos y simulaciones, apoyándose en recursos digitales (MATLAB, Python, calculadoras simbólicas, inteligencia artificial) sin perder de vista la intuición matemática.

Cada capítulo está concebido como un puente:

- entre el álgebra lineal y la resolución de problemas masivos de ingeniería,
- entre las ecuaciones diferenciales y los modelos dinámicos que gobiernan fábricas, ciudades o ecosistemas,
- entre la teoría de funciones complejas y su sorprendente eficacia para resolver integrales o diseñar sistemas eléctricos,
- entre el análisis numérico y la capacidad real de los ordenadores para aproximar lo que la teoría promete.

La invitación es clara: equivócate, prueba, ajusta, y vuelve a intentarlo. El verdadero aprendizaje en este nivel surge del ensayo y del error, del contraste entre el cálculo exacto y la simulación, entre el lápiz y el software.

Este texto ha sido elaborado como apoyo a la asignatura de la Universidad Carlemany, y se complementa con vídeos, sesiones sincrónicas y ejercicios interactivos. Pero su espíritu es abierto: usarlo, adaptarlo, compartirlo, mejorarlo.

Finalmente, un recordatorio con optimismo: lo que ahora parece complejo —autovalores, transformadas, estabilidad de algoritmos— se convertirá pronto en un lenguaje natural si lo entrenas con constancia.

Así como en Matemática 1 descubriste que los números hablan, en Matemática 2 comprobarás que las matemáticas modelan, predicen y deciden. Esa es la verdadera fuerza que ponemos al servicio de la ingeniería.

Sobre el autor

Jordi Ordoñez Adellach es matemático, con un Máster 2 y la Agrégation de la ENS de Rennes. Tras más de 20 años de experiencia como profesor de matemáticas en secundaria y universidad, ha combinado la docencia con la consultoría y el desarrollo de aplicaciones digitales.

Fundador de Solucions Digitals JOA, crea aplicaciones y automatizaciones de alto impacto, forma equipos en inteligencia artificial y lidera Climbox, una plataforma de analítica en tiempo real para salas de escalada. También ha trabajado como analista de datos y consultor para empresas y administraciones públicas, aportando soluciones innovadoras y prácticas.

Apasionado por las matemáticas aplicadas, su enfoque siempre ha sido tender puentes entre la teoría y la práctica, ayudando a estudiantes y profesionales a entender los números como herramientas para leer y transformar la realidad.

1. INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

1.1. LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN LA INDUSTRIA

Las ecuaciones diferenciales son el lenguaje matemático que describe cómo cambian las cantidades en el tiempo y el espacio. En el mundo industrial, desde el control de procesos químicos hasta la dinámica de poblaciones microbianas, estas ecuaciones modelan fenómenos donde las tasas de cambio son fundamentales.

1.1.1. ¿Por qué son esenciales en la industria?

Ejemplo de aplicación: En un reactor químico, la velocidad de una reacción depende de la concentración actual de reactivos. Si $C(t)$ es la concentración en el tiempo t , entonces:

$$\frac{dC}{dt} = -kC$$

Esta ecuación diferencial simple modela procesos industriales críticos como fermentación, síntesis química y tratamiento de aguas.

1.2. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

1.2.1. Definición de Ecuación Diferencial

Una **ecuación diferencial** es una ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes respecto a una o más variables independientes.

Notación:

Leibniz $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$

Prima $y', y'', y''', y^{(4)}$

Ejemplos básicos:

- $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ (derivada de primer orden)
- $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (derivada de segundo orden)
- $y' + 2y = e^x$ (notación prima)

1.2.2. Orden de una Ecuación Diferencial

El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación.

Ejemplos numéricos:

- $y' = x + 1 \rightarrow$ Orden 1
- $y'' + 3y' - 2y = 0 \rightarrow$ Orden 2
- $y''' - xy' + y = \sin x \rightarrow$ Orden 3
- $\frac{d^4y}{dx^4} + x^2 \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow$ Orden 4

1.2.3. Tipos de Soluciones

1.2.3.1. Solución General

Contiene constantes arbitrarias igual al orden de la ecuación.

Ejemplo: Para $y' = 2x$

Solución general: $y = x^2 + C$

1.2.3.2. Solución Particular

Se obtiene asignando valores específicos a las constantes.

Ejemplo: Si $y(0) = 3$, entonces $C = 3$

Solución particular: $y = x^2 + 3$

1.2.4. Verificación de Soluciones

Ejemplo básico: Verificar que $y = Ce^{-2x}$ es solución de $y' + 2y = 0$

- $y = Ce^{-2x}$
- $y' = -2Ce^{-2x}$
- Sustituyendo: $-2Ce^{-2x} + 2(Ce^{-2x}) = 0 \checkmark$

1.3. CLASIFICACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1.3.1. Según la Linealidad

1.3.1.1. Ecuaciones Lineales

La variable dependiente y todas sus derivadas aparecen en primera potencia.

Forma general de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

Ejemplos:

- $y' + 3y = x$ (lineal)
- $y' + xy = e^x$ (lineal)

1.3.1.2. Ecuaciones No Lineales

La variable dependiente o sus derivadas aparecen con potencias distintas de uno, multiplicadas entre sí (por ejemplo, yy') o dentro de funciones no lineales (como $\sin y$ o e^y).

Ejemplos:

- $y' = y^2$ (no lineal por y^2)
- $(y')^2 + y = x$ (no lineal por $(y')^2$)
- $y'' + \sin y = 0$ (no lineal por $\sin y$)

1.3.2. Homogéneas vs No Homogéneas

Para la forma estándar $y' + p(x)y = g(x)$:

Homogénea: $g(x) = 0$

$$y' + p(x)y = 0$$

No Homogénea: $g(x) \neq 0$

$$y' + p(x)y = g(x)$$

Ejemplos numéricos:

- $y' + 2y = 0 \rightarrow$ Homogénea
- $y' + 2y = 3x \rightarrow$ No homogénea
- $y'' - 4y = 0 \rightarrow$ Homogénea
- $y'' - 4y = \cos x \rightarrow$ No homogénea

1.4. ECUACIONES DE VARIABLES SEPARABLES**1.4.1. Forma General**

Una ecuación diferencial es **separable** si puede escribirse como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

o equivalentemente:

$$h(y)dy = g(x)dx$$

1.4.2. Método de Solución

Procedimiento:

1. Separar variables: $h(y)dy = g(x)dx$
2. Integrar ambos lados: $\int h(y)dy = \int g(x)dx + C$
3. Resolver para y si es posible

Error típico: al separar variables en $\frac{dy}{dx} = g(x)k(y)$ dividimos por $k(y)$, y se pierden las soluciones constantes $y = y_0$ con $k(y_0) = 0$. Por ejemplo, en $y' = 2xy$ la separación da $y = Ce^{x^2}$ con $C = \pm e^{C_1} \neq 0$, y hay que añadir aparte la solución $y = 0$, que corresponde a $C = 0$.

1.4.3. Ejemplos Básicos

Ejemplo 1: Resolver $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

- Separando: $dy = 3x^2 dx$
- Integrando: $\int dy = \int 3x^2 dx$
- $y = x^3 + C$

Ejemplo 2: Resolver $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

- Separando: $ydy = xdx$
- Integrando: $\int ydy = \int xdx$
- $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$
- $y^2 = x^2 + 2C$
- $y = \pm\sqrt{x^2 + K}$ donde $K = 2C$

Ejemplo 3: Resolver $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$

- Reescribiendo: $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y}$
- Separando: $e^y dy = e^x dx$
- Integrando: $\int e^y dy = \int e^x dx$
- $e^y = e^x + C$
- $y = \ln(e^x + C)$

1.5. ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

1.5.1. Forma Estándar

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

1.5.2. Factor Integrante

El factor integrante es:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

1.5.3. Método de Solución

Procedimiento:

1. Escribir en forma estándar
2. Encontrar $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$
3. Multiplicar la ecuación por $\mu(x)$
4. El lado izquierdo se convierte en $\frac{d}{dx}[\mu(x)y]$
5. Integrar: $\mu(x)y = \int \mu(x)f(x)dx + C$
6. Resolver para y

1.5.4. Ejemplos Básicos

Ejemplo 1: Resolver $y' + 2y = e^x$

- $p(x) = 2, f(x) = e^x$
- $\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$
- Multiplicando: $e^{2x}y' + 2e^{2x}y = e^{2x} \cdot e^x = e^{3x}$
- $\frac{d}{dx}[e^{2x}y] = e^{3x}$
- $e^{2x}y = \int e^{3x}dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- $y = \frac{e^x}{3} + Ce^{-2x}$

Ejemplo 2: Resolver $xy' + y = x^2$

- Forma estándar: $y' + \frac{1}{x}y = x$
- $p(x) = \frac{1}{x}, f(x) = x$

- $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$ (tomamos $x > 0$: en general $\int \frac{dx}{x} = \ln |x|$, y la solución es válida en un intervalo que no contenga $x = 0$, donde la forma estándar no está definida)
- Multiplicando: $xy' + y = x^2$
- $\frac{d}{dx}[xy] = x^2$
- $xy = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$
- $y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$

1.6. MODELOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

1.6.1. Modelo Exponencial Básico

La ecuación diferencial fundamental:

$$\frac{dp}{dt} = kp$$

donde:

- $p(t)$ = población/cantidad en el tiempo t
- k = constante de crecimiento ($k > 0$) o decrecimiento ($k < 0$)

Solución general:

$$p(t) = p_0 e^{kt}$$

donde $p_0 = p(0)$ es la cantidad inicial.

1.6.2. Aplicaciones del Modelo Exponencial

1.6.2.1. Crecimiento Poblacional

Ejemplo básico: Una población de bacterias se duplica cada 3 horas. Si inicialmente hay 1000 bacterias, ¿cuántas habrá después de 12 horas?

- Datos: $p_0 = 1000, p(3) = 2000$
- De $p(t) = p_0 e^{kt}$: $2000 = 1000 e^{3k}$
- $2 = e^{3k} \rightarrow \ln 2 = 3k \rightarrow k = \frac{\ln 2}{3} \approx 0.231$
- $p(t) = 1000 e^{0.231t}$
- Para $t = 12$: $p(12) = 1000 e^{0.231 \times 12} = 1000 e^{2.772} = 16000$ bacterias

1.6.2.2. Decaimiento Radiactivo

Ejemplo básico: El Carbono-14 tiene una vida media de 5730 años. ¿Qué porcentaje queda después de 10000 años?

- Vida media significa: $p(5730) = \frac{p_0}{2}$
- $\frac{p_0}{2} = p_0 e^{5730k} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{5730k}$
- $\ln(0.5) = 5730k \rightarrow k = \frac{-0.693}{5730} = -1.21 \times 10^{-4}$
- Para $t = 10000$: $p(10000) = p_0 e^{-1.21 \times 10^{-4} \times 10000} = p_0 e^{-1.21} = 0.298 p_0$
- Queda el 29.8 % del material original

1.6.3. Interés Compuesto Continuo

Fórmula:

$$A(t) = P_0 e^{rt}$$

donde:

- $A(t)$ = cantidad después del tiempo t
- P_0 = principal inicial
- r = tasa de interés anual
- t = tiempo en años

Ejemplo básico: ¿Cuánto tiempo se necesita para duplicar un capital de 10 000 € al 5 % de interés compuesto continuo?

- $A(t) = 10000 e^{0.05t}$
- Para duplicar: $20000 = 10000 e^{0.05t}$
- $2 = e^{0.05t} \rightarrow \ln 2 = 0.05t$
- $t = \frac{\ln 2}{0.05} = \frac{0.693}{0.05} = 13.86$ años

1.7. CAMPOS DE DIRECCIONES

1.7.1. Concepto Básico

Un **campo de direcciones** es una representación gráfica de una ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ que muestra las pendientes de las curvas solución en varios puntos del plano xy .

1.7.2. Construcción del Campo

Para la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$:

1. Seleccionar puntos (x,y) en el plano
2. Calcular $f(x,y)$ en cada punto
3. Dibujar segmentos de recta con pendiente $f(x,y)$

1.7.3. Ejemplo Básico

Ecuación: $y' = x + y$

Cálculos en puntos específicos:

Punto (x,y)	$f(x,y) = x + y$	Pendiente
(0,0)	$0 + 0 = 0$	0
(1,0)	$1 + 0 = 1$	1
(0,1)	$0 + 1 = 1$	1
(1,1)	$1 + 1 = 2$	2
(-1,0)	$-1 + 0 = -1$	-1

1.7.4. Isoclinas

Las **isoclinas** son curvas donde la pendiente es constante.

Para $y' = f(x,y) = c$ (constante):

Ejemplo: Para $y' = x + y$, las isoclinas son:

- $x + y = 0 \rightarrow y = -x$ (pendiente 0)
- $x + y = 1 \rightarrow y = 1 - x$ (pendiente 1)
- $x + y = -1 \rightarrow y = -1 - x$ (pendiente -1)

1.7.5. Interpretación Física

Ejemplo industrial: En el enfriamiento de un objeto, si $T(t)$ es la temperatura:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{ambiente})$$

El campo de direcciones muestra cómo la temperatura cambia según la diferencia con el ambiente.

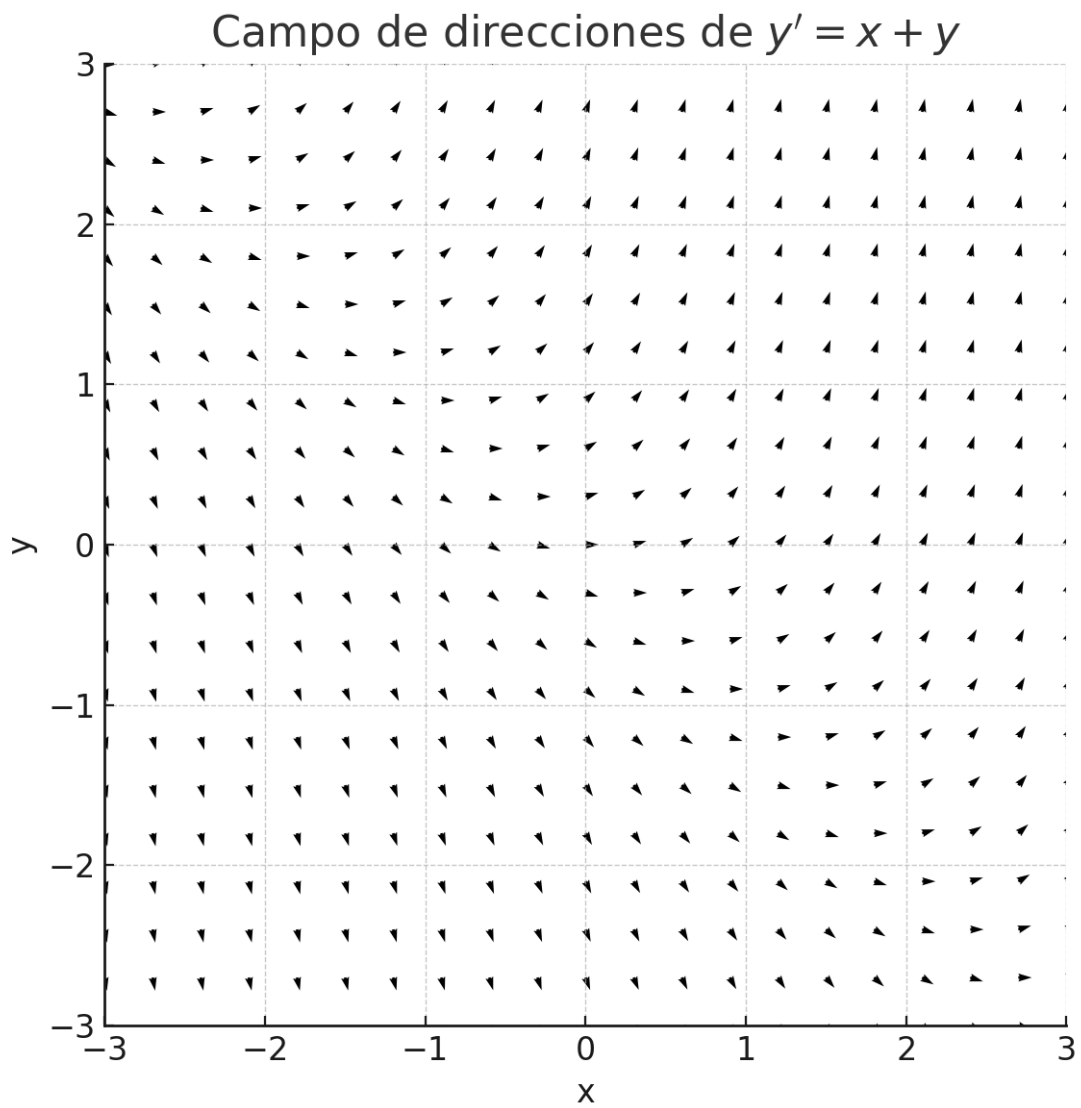


Figura 1.1: Campo de direcciones de $y' = x + y$. Cada flecha indica la pendiente $f(x,y) = x + y$ en el punto (x,y) .

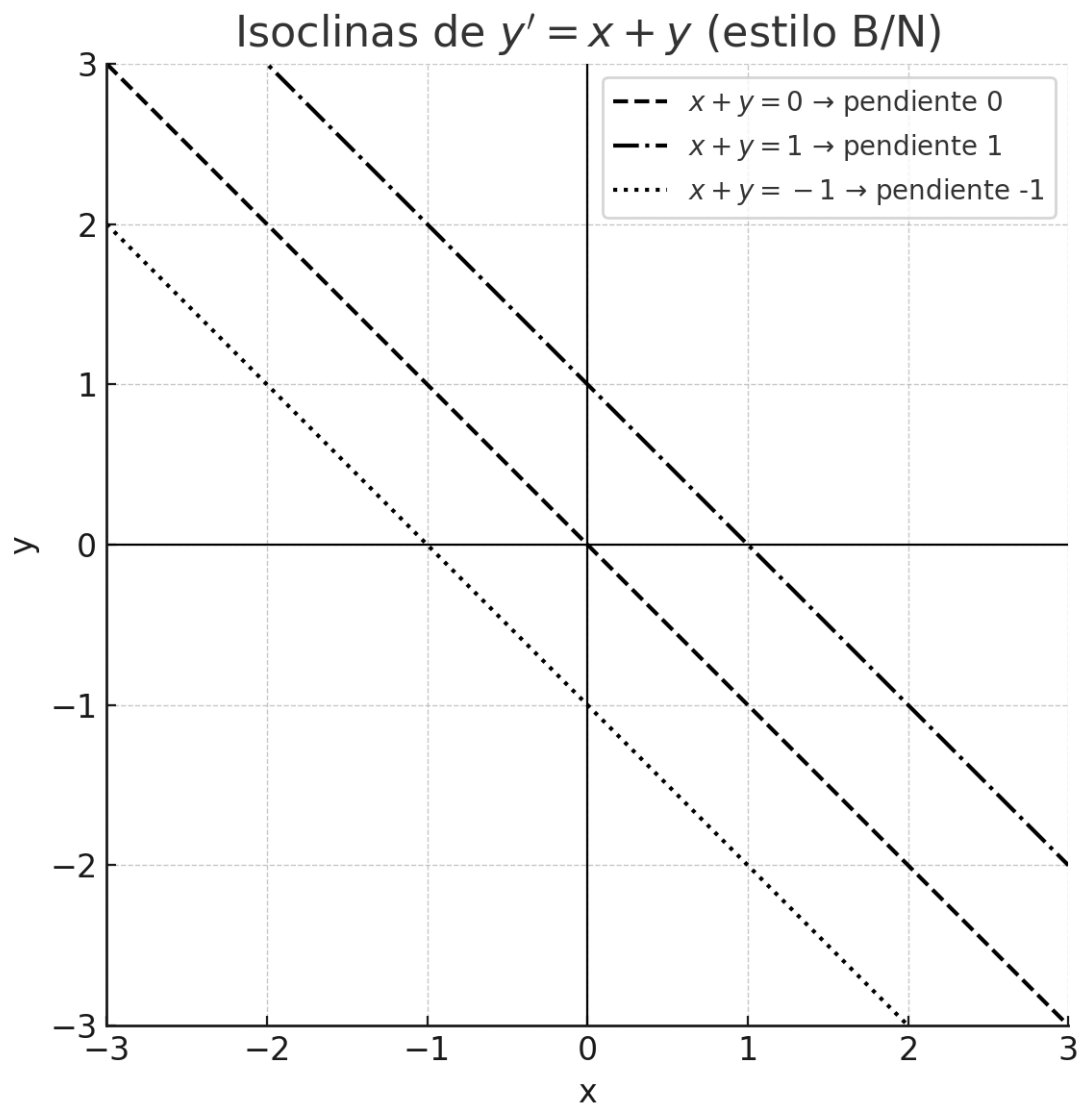


Figura 1.2: Isoclinas de $y' = x + y$. Cada línea recta corresponde a puntos donde la pendiente de las soluciones es constante.

1.8. EJERCICIOS BÁSICOS FUNDAMENTALES

1.8.1. Ejercicio Básico 1: Verificación de Soluciones

Verificar que $y = Ce^{3x}$ es solución de $y' - 3y = 0$

Solución:

- $y = Ce^{3x}$
- $y' = 3Ce^{3x}$
- Sustituyendo: $3Ce^{3x} - 3(Ce^{3x}) = 3Ce^{3x} - 3Ce^{3x} = 0 \checkmark$

1.8.2. Ejercicio Básico 2: Variables Separables

Resolver $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$ con $y(0) = 3$ e $y \geq 0$

Solución:

- Separando: $ydy = 2xdx$
- Integrando: $\int ydy = \int 2xdx$
- $\frac{y^2}{2} = x^2 + C$
- $y^2 = 2x^2 + 2C$
- Condición inicial: $y(0) = 3 \rightarrow 9 = 0 + 2C \rightarrow C = \frac{9}{2}$
- $y^2 = 2x^2 + 9$
- $y = \sqrt{2x^2 + 9}$ (tomamos la raíz positiva)

1.8.3. Ejercicio Básico 3: Ecuación Lineal

Resolver $y' + y = 2e^x$

Solución:

- $p(x) = 1, f(x) = 2e^x$
- Factor integrante: $\mu(x) = e^{\int 1dx} = e^x$
- Multiplicando: $e^x y' + e^x y = 2e^{2x}$
- $\frac{d}{dx}[e^x y] = 2e^{2x}$
- $e^x y = \int 2e^{2x} dx = e^{2x} + C$
- $y = e^x + Ce^{-x}$

1.8.4. Ejercicio Básico 4: Crecimiento Exponencial

Una población crece según $\frac{dp}{dt} = 0.03p$. Si $p(0) = 5000$, encontrar $p(t)$ y calcular cuándo se duplicará.

Solución:

- Solución general: $p(t) = p_0 e^{kt} = 5000e^{0.03t}$
- Para duplicar: $10000 = 5000e^{0.03t}$
- $2 = e^{0.03t} \rightarrow \ln 2 = 0.03t$
- $t = \frac{\ln 2}{0.03} = \frac{0.693}{0.03} = 23.1$ unidades de tiempo

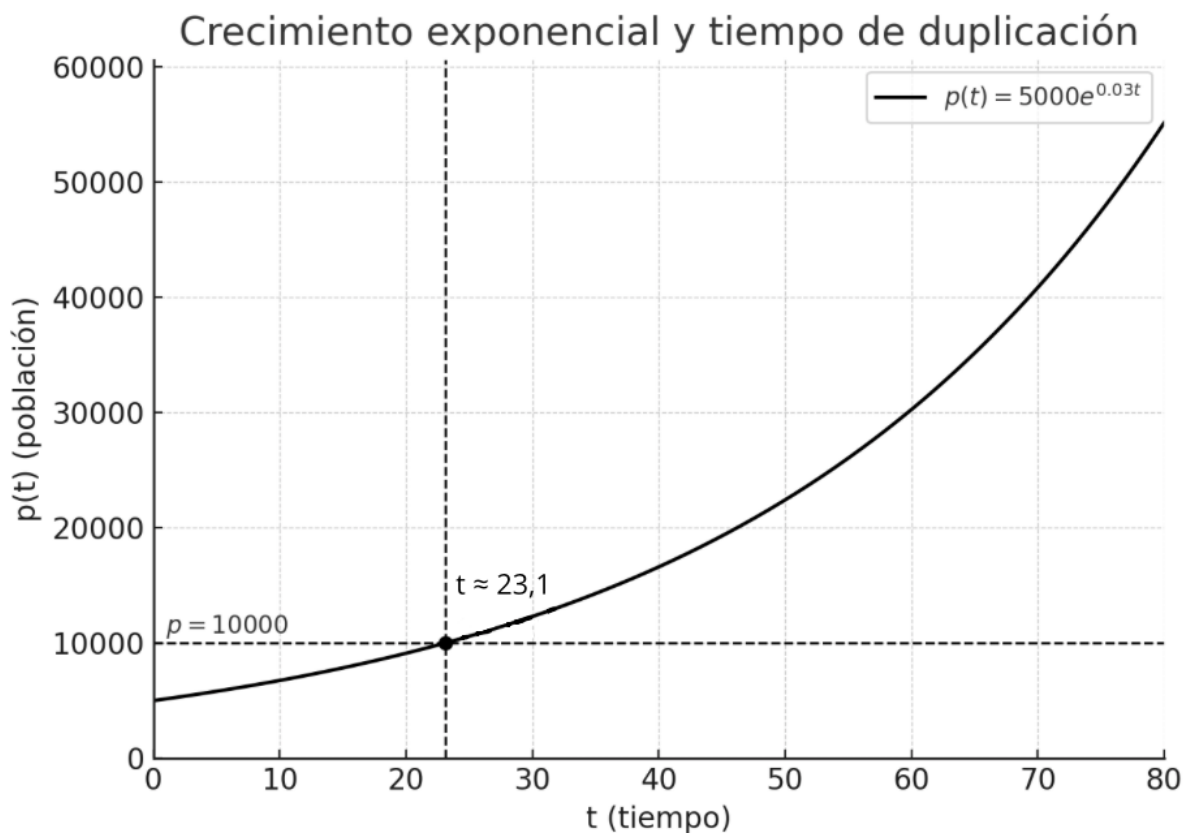


Figura 1.3: Crecimiento exponencial de la población con $p(0) = 5000$. La línea discontinua marca el instante en que la población se duplica ($t \approx 23.1$).

1.8.5. Ejercicio Básico 5: Campo de Direcciones

Para $y' = y - x$, calcular las pendientes en los puntos $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(0,2)$

Solución:

- En $(0,0)$: $y' = 0 - 0 = 0$
- En $(1,1)$: $y' = 1 - 1 = 0$
- En $(2,0)$: $y' = 0 - 2 = -2$

- En $(0,2)$: $y' = 2 - 0 = 2$

1.9. APLICACIONES INDUSTRIALES

1.9.1. Control de Temperatura en Procesos Industriales

Ley de Enfriamiento de Newton:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

donde $T(t)$ es la temperatura del objeto, T_a es la temperatura ambiente, y $k > 0$ es la constante de enfriamiento. En términos más simples: la velocidad de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura del ambiente. De manera intuitiva: un objeto se enfría más rápido cuando está más caliente que su entorno.

Caso práctico: Un horno industrial se enfría de 800°C a 600°C en 10 minutos cuando la temperatura ambiente es 20°C . ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a 100°C ?

Solución:

- Ecuación: $\frac{dT}{dt} = -k(T - 20)$
- Solución: $T(t) = 20 + (T_0 - 20)e^{-kt} = 20 + 780e^{-kt}$
- Datos: $T(10) = 600 \rightarrow 600 = 20 + 780e^{-10k}$
- $580 = 780e^{-10k} \rightarrow e^{-10k} = \frac{580}{780} = 0.744$
- $-10k = \ln(0.744) = -0.296 \rightarrow k = 0.0296$
- Para $T = 100$: $100 = 20 + 780e^{-0.0296t}$
- $80 = 780e^{-0.0296t} \rightarrow e^{-0.0296t} = \frac{80}{780} \approx 0.1026$
- $-0.0296t = \ln(0.1026) = -2.277 \rightarrow t \approx 76.9$ minutos

1.9.2. Reactores Químicos de Primer Orden

Ecuación de velocidad:

$$\frac{dC}{dt} = -kC$$

donde $C(t)$ es la concentración del reactivo y k es la constante de velocidad.

Caso práctico: En un reactor batch, la concentración inicial de un reactivo es 2.0 M. Después de 30 minutos, la concentración es 1.2 M. ¿Cuál es la vida media del reactivo?

Solución:

- $C(t) = C_0 e^{-kt} = 2.0e^{-kt}$

- $C(30) = 1.2 \rightarrow 1.2 = 2.0e^{-30k}$
- $e^{-30k} = 0.6 \rightarrow -30k = \ln(0.6) = -0.511$
- $k = \frac{0.511}{30} \approx 0.01703 \text{ min}^{-1}$
- Vida media: $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0.693}{0.01703} \approx 40.7 \text{ minutos}$

1.9.3. Circuitos RC

Ecuación del circuito:

$$RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = V_S$$

donde V_C es el voltaje en el capacitor, V_S es el voltaje de la fuente, R es la resistencia, y C es la capacitancia.

Caso práctico: Un circuito RC con $R = 1000 \Omega$ y $C = 100 \mu\text{F}$ se conecta a una fuente de 12V. ¿Cuánto tiempo tarda el capacitor en cargarse al 95 % del voltaje de la fuente?

Solución:

- $\tau = RC = 1000 \times 100 \times 10^{-6} = 0.1 \text{ s}$
- $\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{\tau} = \frac{V_S}{\tau}$
- Solución: $V_C(t) = V_S(1 - e^{-t/\tau}) = 12(1 - e^{-t/0.1})$
- Para 95 %: $0.95 \times 12 = 12(1 - e^{-t/0.1})$
- $0.95 = 1 - e^{-t/0.1} \rightarrow e^{-t/0.1} = 0.05$
- $-t/0.1 = \ln(0.05) = -2.996 \rightarrow t = 0.3 \text{ segundos}$

1.9.4. Dinámica de Poblaciones Microbianas

Modelo logístico simple:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right)$$

donde $P(t)$ es la población, r es la tasa de crecimiento intrínseco, y K es la capacidad de carga.

Caso práctico: En un biorreactor, la población inicial de microorganismos es 1000 células/mL, la capacidad máxima es 50000 células/mL, y la tasa de crecimiento es 0.5 h^{-1} . ¿Cuál es la población después de 8 horas?

Solución:

- Solución del modelo logístico: $P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0} \right) e^{-rt}}$

- $P(t) = \frac{50000}{1 + \left(\frac{50000-1000}{1000}\right)e^{-0.5t}} = \frac{50000}{1+49e^{-0.5t}}$
- Para $t = 8$: $P(8) = \frac{50000}{1+49e^{-4}} = \frac{50000}{1+49 \times 0.01832} = \frac{50000}{1.8975} \approx 26350$ células/mL

1.9.5. Control de Nivel en Tanques

Ecuación de balance:

$$A \frac{dh}{dt} = Q_{in} - Q_{out}$$

donde h es la altura del líquido, A es el área de la sección transversal, Q_{in} es el flujo de entrada, y Q_{out} es el flujo de salida.

Para un tanque con válvula de salida: $Q_{out} = k\sqrt{h}$

Caso práctico: Un tanque cilíndrico con área de 2 m^2 tiene un flujo de entrada constante de $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ y un flujo de salida $Q_{out} = 0.05\sqrt{h} \text{ m}^3/\text{s}$. Si el nivel inicial es 1 m , ¿cuál es la ecuación diferencial y el nivel de equilibrio?

Solución:

- Ecuación diferencial: $2 \frac{dh}{dt} = 0.1 - 0.05\sqrt{h}$
- $\frac{dh}{dt} = 0.05 - 0.025\sqrt{h}$
- En equilibrio: $\frac{dh}{dt} = 0 \rightarrow 0.05 = 0.025\sqrt{h}$
- $\sqrt{h} = 2 \rightarrow h = 4 \text{ m}$

1.10. CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS

Las ecuaciones diferenciales son herramientas fundamentales para modelar fenómenos dinámicos en la industria. Su aplicación abarca desde procesos químicos hasta sistemas de control, proporcionando:

1. **Modelado preciso:** Descripción matemática de procesos industriales complejos
2. **Predicción de comportamiento:** Análisis de la evolución temporal de sistemas
3. **Optimización de procesos:** Determinación de condiciones óptimas de operación
4. **Control automático:** Base para el diseño de sistemas de control

Próximos pasos: En cursos posteriores, estos conceptos se extenderán hacia:

- Ecuaciones diferenciales de orden superior
- Sistemas de ecuaciones diferenciales
- Métodos numéricos para soluciones aproximadas
- Transformadas de Laplace para análisis de sistemas

“En la naturaleza, nada es instantáneo; todo evoluciona según leyes que las ecuaciones diferenciales nos ayudan a descifrar.”

En la industria moderna, dominar estas ecuaciones es esencial para la innovación y el control de procesos.

2. FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

2.1. EL ANÁLISIS COMPLEJO EN LA INGENIERÍA

El análisis de funciones de variable compleja representa una extensión natural del cálculo diferencial e integral al plano complejo. En ingeniería, estas funciones modelan fenómenos donde la magnitud y la fase son igualmente importantes: desde el análisis de señales hasta la mecánica de fluidos, pasando por la teoría electromagnética.

2.1.1. ¿Por qué son fundamentales en la industria?

Ejemplo de aplicación: En el análisis de circuitos de corriente alterna, la función de transferencia $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ donde $s = \sigma + i\omega$ es una variable compleja, permite analizar tanto la respuesta en magnitud como en fase del sistema.

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Esta función compleja contiene toda la información sobre estabilidad, resonancia y comportamiento transitorio del sistema.

2.2. FUNCIONES COMPLEJAS Y CONTINUIDAD

2.2.1. Definición de Función Compleja

Una función de variable compleja es una función $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ donde:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

donde $z = x + iy$, y $u(x,y)$, $v(x,y)$ son funciones reales de dos variables.

Ejemplos básicos:

Ejemplo 1: $f(z) = z^2$

- $f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$
- $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$

Ejemplo 2: $f(z) = e^z$

- $f(x + iy) = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$
- $u(x,y) = e^x \cos y, v(x,y) = e^x \sin y$

Ejemplo 3: $f(z) = \frac{1}{z}$ (para $z \neq 0$)

- $f(x + iy) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$
- $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$

2.2.2. Límites y Continuidad

Una función $f(z)$ es **continua** en z_0 si:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Esta definición requiere que el límite exista independientemente de la dirección de aproximación en el plano complejo.

Ejemplo básico: Verificar la continuidad de $f(z) = z^2$ en $z_0 = 1 + i$

- $f(1 + i) = (1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$
- $\lim_{z \rightarrow 1+i} z^2 = (1 + i)^2 = 2i = f(1 + i) \checkmark$

2.2.3. Propiedades de Continuidad

Teorema: Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es continua en z_0 , entonces $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son continuas en (x_0, y_0) .

Ejemplo numérico: Para $f(z) = z^3$:

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \quad \text{y} \quad v(x,y) = 3x^2y - y^3$$

Ambas son polinomios, por tanto continuas en todo $\mathbb{R}^2$.

2.3. DIFERENCIABILIDAD COMPLEJA Y CONDICIONES DE CAUCHY-RIEMANN

2.3.1. Derivada Compleja

Una función $f(z)$ es **diferenciable** en z_0 si existe:

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

donde el límite debe existir independientemente de cómo $h \rightarrow 0$ en el plano complejo.

2.3.2. Condiciones de Cauchy-Riemann

Teorema: Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es diferenciable en $z_0 = x_0 + iy_0$, entonces:

- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ (Condición 1)
- $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (Condición 2)

Recíproco (condición suficiente): si u y v tienen derivadas parciales primeras continuas en un entorno de (x_0, y_0) y cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en ese punto, entonces f es diferenciable en z_0 . Las condiciones de Cauchy-Riemann por sí solas son necesarias, pero no suficientes.

2.3.3. Ejemplos de Verificación

Ejemplo 1: Verificar si $f(z) = z^2$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann

- $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$
- $u(x,y) = x^2 - y^2, v(x,y) = 2xy$
- $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \checkmark$
- $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$
- $-\frac{\partial v}{\partial x} = -2y \checkmark$

Las condiciones se cumplen en todo punto y las derivadas parciales son continuas (son polinomios), por tanto $f(z) = z^2$ es diferenciable en todo $\mathbb{C}$.

Ejemplo 2: Verificar si $f(z) = \bar{z}$ es diferenciable

- $f(z) = x - iy$
- $u(x,y) = x, v(x,y) = -y$
- $\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial y} = -1$
- $1 \neq -1$: no se cumple la condición 1

Las condiciones no se cumplen, por tanto $f(z) = \bar{z}$ no es diferenciable.

2.3.4. Fórmula para la Derivada

Si las condiciones de Cauchy-Riemann se cumplen:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Ejemplo: Para $f(z) = z^2$:

- $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i(2y) = 2(x + iy) = 2z$

2.4. FUNCIONES ANALÍTICAS

2.4.1. Definición

Una función $f(z)$ es **analítica** (o **holomorfa**) en un punto z_0 si es diferenciable en z_0 y en una vecindad de z_0 .

Vecindad Una vecindad de un punto z_0 es un conjunto abierto que contiene a z_0 .

Ejemplos:

- Disco abierto: $N_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ para algún $r > 0$
- Cualquier conjunto abierto que contenga a z_0 .

Intuición: Es una “región alrededor” del punto donde podemos “movernos un poco” sin salir del conjunto.

Dominio Un dominio es un conjunto $D \subset \mathbb{C}$ que es:

- Abierto: Todo punto de D tiene una vecindad contenida en D
- Conexo: No se puede separar en dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos

Ejemplos:

- El plano complejo: $\mathbb{C}$
- Disco abierto: $\{z : |z| < 1\}$
- Semiplano superior: $\{z : \text{Im}(z) > 0\}$
- Plano sin el origen: $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Contraejemplos (NO son dominios):

- $\{z : |z| \leq 1\}$ (cerrado, no abierto)
- $\{z : 0 < |z| < 1\} \cup \{z : 2 < |z| < 3\}$ (no conexo)

¿Por qué esta definición? Porque la diferenciabilidad en un solo punto no garantiza las propiedades poderosas del análisis complejo. Necesitamos diferenciabilidad “local” (en una región).

2.4.2. Propiedades Fundamentales

Teorema: Si $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en un dominio D , entonces:

1. $f(z) \pm g(z)$ es analítica en D
2. $f(z) \cdot g(z)$ es analítica en D
3. $\frac{f(z)}{g(z)}$ es analítica en D donde $g(z) \neq 0$

4. $f(g(z))$ es analítica donde esté definida

2.4.3. Funciones Elementales Analíticas

2.4.3.1. Función Exponencial

$$\blacksquare e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Propiedades:

- Analítica en todo $\mathbb{C}$
- $(e^z)' = e^z$
- $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

Ejemplo numérico:

$$e^{1+i\pi} = e^1(\cos \pi + i \sin \pi) = e(-1 + 0i) = -e$$

2.4.3.2. Funciones Trigonométricas

$$\blacksquare \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\blacksquare \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Ejemplo numérico:

$$\sin(i) = \frac{e^{i \cdot i} - e^{-i \cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^1}{2i} = \frac{1/e - e}{2i} = i \frac{e - 1/e}{2} = i \sinh(1)$$

2.4.3.3. Logaritmo Complejo

$$\blacksquare \log z = \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z) + 2\pi ki, k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo numérico:

$$\operatorname{Log}(-1) = \ln |-1| + i \operatorname{Arg}(-1) = 0 + i\pi = i\pi \text{ (rama principal, } k = 0)$$

Para hacer el logaritmo univaluado, elegimos la rama principal: con $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ que es el argumento principal.

2.4.4. Series de Potencias

Una función analítica puede representarse como serie de potencias:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Ejemplo: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ (converge para todo $z \in \mathbb{C}$)

2.5. FUNCIONES ARMÓNICAS

2.5.1. Definición

Una función $u(x,y)$ es **armónica** en un dominio D si:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

2.5.2. Relación con Funciones Analíticas

Teorema: Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica, entonces tanto $u(x,y)$ como $v(x,y)$ son funciones armónicas.

2.5.3. Ejemplos Básicos

Ejemplo 1: Para $f(z) = z^2$:

- $u(x,y) = x^2 - y^2$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$
- $\nabla^2 u = 2 + (-2) = 0 \checkmark$

Ejemplo 2: Para $f(z) = e^z$:

- $u(x,y) = e^x \cos y$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \cos y, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cos y$
- $\nabla^2 u = e^x \cos y - e^x \cos y = 0 \checkmark$

2.5.4. Funciones Conjugadas Armónicas

Si $u(x,y)$ es armónica, existe $v(x,y)$ tal que $f(z) = u + iv$ es analítica. Las funciones u y v se llaman **conjugadas armónicas**.

Método para encontrar v :

De las condiciones de Cauchy-Riemann:

- $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$
- $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$

Ejemplo: Encontrar la conjugada armónica de $u(x,y) = x^2 - y^2$

- $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$
- $\frac{\partial v}{\partial x} = -(-2y) = 2y$
- $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$

- Integrando: $v(x,y) = 2xy + C$

Verificación: $f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy) = z^2 \checkmark$

2.6. INTEGRACIÓN EN EL PLANO COMPLEJO

2.6.1. Integrales de Línea

Para una curva C parametrizada por $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

2.6.2. Ejemplos Básicos

Ejemplo 1: Calcular $\int_C z dz$ donde C es el segmento de 0 a $1 + i$

- Parametrización: $z(t) = t + it$, $0 \leq t \leq 1$
- $z'(t) = 1 + i$
- $\int_C z dz = \int_0^1 (t + it)(1 + i)dt = \int_0^1 (t + it + it - t)dt = \int_0^1 2it dt = 2i \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = i$

Ejemplo 2: Calcular $\int_C \frac{1}{z} dz$ donde C es el círculo $|z| = 1$ recorrido una vez en sentido antihorario

- Parametrización: $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$
- $z'(t) = ie^{it}$
- $\int_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$

2.6.3. Propiedades de la Integración

1. **Linealidad:** $\int_C [af(z) + bg(z)]dz = a \int_C f(z)dz + b \int_C g(z)dz$
2. **Aditividad:** $\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$
3. **Orientación:** $\int_{-C} f(z)dz = - \int_C f(z)dz$

2.6.4. Estimación de Integrales

Teorema ML: Si $|f(z)| \leq M$ en la curva C de longitud L , entonces:

- $\left| \int_C f(z)dz \right| \leq ML$

2.7. TEOREMA DE CAUCHY Y FÓRMULA INTEGRAL

2.7.1. Teorema de Cauchy

Un dominio D es simplemente conexo si:

- Es un dominio (abierto y conexo)
- No tiene “hoyos”: Toda curva cerrada simple en D puede contraerse continuamente a un punto sin salir de D .

Teorema: Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo D y C es una curva cerrada simple en D , entonces:

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

2.7.2. Fórmula Integral de Cauchy

Una curva cerrada simple es una curva que:

- Se cierra: El punto inicial coincide con el final
- No se interseca a sí misma: Excepto en los extremos
- Divide el plano: En una región interior (acotada) y una exterior (no acotada)

Ejemplos: Círculos, elipses, rectángulos, cualquier “lazo” sin cruces.

Teorema: Si $f(z)$ es analítica en el interior y sobre una curva cerrada simple C , y z_0 está en el interior de C , entonces:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

2.7.3. Ejemplos de Aplicación

Ejemplo 1: Calcular $\oint_C \frac{e^z}{z-i} dz$ donde C es el círculo $|z| = 2$

- Como e^z es analítica y $|i| = 1 < 2$, aplicamos la fórmula:
- $\oint_C \frac{e^z}{z-i} dz = 2\pi i \cdot e^i = 2\pi i(\cos 1 + i \sin 1)$

Ejemplo 2: Calcular $\oint_C \frac{z^2}{z^2+1} dz$ donde C es el círculo $|z| = 3$

- $\frac{z^2}{z^2+1} = \frac{z^2}{(z-i)(z+i)}$
- Los polos i y $-i$ están dentro de C . Usando descomposición en fracciones parciales:
- $\frac{z^2}{(z-i)(z+i)} = 1 - \frac{1}{z^2+1} = 1 - \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right)$
- $\oint_C \frac{z^2}{z^2+1} dz = \oint_C 1 dz - \frac{1}{2i} \oint_C \frac{1}{z-i} dz + \frac{1}{2i} \oint_C \frac{1}{z+i} dz$
- $= 0 - \frac{1}{2i}(2\pi i) + \frac{1}{2i}(2\pi i) = 0$

2.7.4. Fórmula para Derivadas

Teorema: Las derivadas de una función analítica están dadas por:

$$\blacksquare f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

2.8. SERIES DE LAURENT Y SINGULARIDADES

2.8.1. Series de Laurent

Una función analítica en un anillo $r < |z - z_0| < R$ puede representarse como:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

donde:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

2.8.2. Clasificación de Singularidades

Para una singularidad aislada en z_0 :

2.8.2.1. Singularidad Removable

Si $a_n = 0$ para todo $n < 0$.

2.8.2.2. Polo de Orden m

Si $a_{-m} \neq 0$ y $a_n = 0$ para $n < -m$.

2.8.2.3. Singularidad Esencial

Si infinitos coeficientes a_n con $n < 0$ son no nulos.

2.8.3. Ejemplos de Clasificación

Ejemplo 1: $f(z) = \frac{\sin z}{z}$

$$\blacksquare \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\blacksquare f(z) = \frac{z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots}{z} = 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \dots$$

Singularidad removable en $z = 0$.

Ejemplo 2: $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$

■ Descomposición en fracciones parciales:

- $f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1}$
- Resolviendo: $A = -1, B = -1, C = 1$
- $f(z) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-1}$

Polo de orden 2 en $z = 0$, polo simple en $z = 1$.

Ejemplo 3: $f(z) = e^{1/z}$

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

Singularidad esencial en $z = 0$.

2.8.4. Teorema del Residuo

Teorema: Si $f(z)$ es analítica en el interior y sobre una curva cerrada simple C , recorrida en sentido antihorario, salvo en un número finito de singularidades aisladas $z_1, z_2, \dots, z_n$ situadas en el interior de C , entonces:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

donde $\text{Res}(f, z_k) = a_{-1}$ en la serie de Laurent alrededor de z_k .

2.9. EJERCICIOS BÁSICOS FUNDAMENTALES

2.9.1. Ejercicio Básico 1: Condiciones de Cauchy-Riemann

Determinar si $f(z) = z^3$ es analítica y calcular $f'(z)$

Solución:

- $f(z) = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3$
 $= x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$
- $u(x,y) = x^3 - 3xy^2, v(x,y) = 3x^2y - y^3$
- $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \checkmark$
- $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy, -\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy \checkmark$
- $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = (3x^2 - 3y^2) + i(6xy) = 3(x^2 - y^2 + 2ixy) = 3z^2$

2.9.2. Ejercicio Básico 2: Función Armónica

Verificar que $u(x,y) = e^x \cos y$ es armónica y encontrar su conjugada armónica

Solución:

- $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \cos y$
- $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cos y$
- $\nabla^2 u = e^x \cos y - e^x \cos y = 0 \checkmark$
- Para la conjugada armónica v :
- $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y$
- $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$
- Integrando: $v(x, y) = e^x \sin y + C$

2.9.3. Ejercicio Básico 3: Integral de Línea

Calcular $\int_C (z^2 + \bar{z}) dz$ donde C es el segmento de 0 a $1 + i$

Solución:

- Parametrización: $z(t) = t(1 + i) = t + it, 0 \leq t \leq 1$
- $\bar{z}(t) = t - it, z'(t) = 1 + i$
- $\int_C (z^2 + \bar{z}) dz = \int_0^1 [(t + it)^2 + (t - it)](1 + i) dt$
- $(t + it)^2 = t^2 + 2it^2 - t^2 = 2it^2$
- $\int_0^1 [2it^2 + t - it](1 + i) dt = \int_0^1 [2it^2 + t(1 - i)](1 + i) dt$
- $= \int_0^1 [2it^2(1 + i) + t(1 - i)(1 + i)] dt$
- $= \int_0^1 [2it^2 - 2t^2 + 2t] dt = \int_0^1 (2t - 2t^2 + 2it^2) dt$
- $= t^2 - \frac{2t^3}{3} + \frac{2it^3}{3} \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{2i}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2i}{3}$

2.9.4. Ejercicio Básico 4: Teorema del Residuo

Calcular $\oint_C \frac{z}{z^2 + 4} dz$ donde C es el círculo $|z| = 3$

Solución:

- $f(z) = \frac{z}{z^2 + 4} = \frac{z}{(z - 2i)(z + 2i)}$
- Los polos son $z = 2i$ y $z = -2i$, ambos dentro de $|z| = 3$
- $\text{Res}(f, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{z}{(z - 2i)(z + 2i)} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z}{z + 2i} = \frac{2i}{4i} = \frac{1}{2}$
- $\text{Res}(f, -2i) = \lim_{z \rightarrow -2i} (z + 2i) \frac{z}{(z - 2i)(z + 2i)} = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z}{z - 2i} = \frac{-2i}{-4i} = \frac{1}{2}$
- $\oint_C \frac{z}{z^2 + 4} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2\pi i$

Atajo útil: si $f = \frac{p}{q}$ con $q(z_0) = 0$, $q'(z_0) \neq 0$ y $p(z_0) \neq 0$, entonces $\text{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$. Aquí, $\frac{z}{2z} = \frac{1}{2}$ en ambos polos, sin necesidad de factorizar.

2.9.5. Ejercicio Básico 5: Serie de Laurent

Encontrar la serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ alrededor de $z = 0$

Solución:

- Descomposición en fracciones parciales:
- $\frac{1}{z(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}$
- $1 = A(z-1) + Bz$
- Para $z = 0$: $1 = -A \Rightarrow A = -1$
- Para $z = 1$: $1 = B \Rightarrow B = 1$
- $f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z}$
- $-\frac{1}{1-z} = -(1 + z + z^2 + z^3 + \dots)$ para $|z| < 1$
- $f(z) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \dots$

2.10. APLICACIONES INDUSTRIALES

2.10.1. Análisis de Estabilidad en Sistemas de Control

Criterio de Nyquist:

El criterio de Nyquist utiliza el mapeo conforme de la función de transferencia $G(s)H(s)$ para determinar la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Caso práctico: Sistema de control con función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Para $s = i\omega$ (eje imaginario):

$$G(i\omega) = \frac{K}{i\omega(i\omega+1)(i\omega+2)} = \frac{K}{i\omega(-\omega^2+3i\omega+2)}$$

Análisis de estabilidad:

- El sistema es estable si el diagrama de Nyquist no encierra el punto $(-1, 0)$
- Para $K = 6$, el sistema está en el límite de estabilidad

2.10.2. Análisis de Señales y Filtros

Función de Transferencia de un Filtro Pasabajos:

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

donde ω_c es la frecuencia de corte.

Caso práctico: Filtro RC con $R = 1000 \, \Omega$ y $C = 1 \, \mu\text{F}$:

- $\omega_c = \frac{1}{RC} = \frac{1}{10^3 \times 10^{-6}} = 1000 \, \text{rad/s}$
- $H(s) = \frac{1000}{s + 1000}$

Conexión con el capítulo 1: es el mismo circuito de la ecuación $RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = V_S$. Si se toman V_C y V_S proporcionales a e^{st} , derivar equivale a multiplicar por s , y queda $H(s) = \frac{V_C}{V_S} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$ con $\omega_c = 1/\tau$. El polo $s = -1/\tau$ es la constante de tiempo del transitorio $e^{-t/\tau}$ estudiado allí.

Respuesta en frecuencia:

Para $s = i\omega$:

- $H(i\omega) = \frac{1000}{i\omega + 1000} = \frac{1000(1000 - i\omega)}{1000^2 + \omega^2}$
- $|H(i\omega)| = \frac{1000}{\sqrt{1000^2 + \omega^2}}$
- $\arg(H(i\omega)) = -\arctan\left(\frac{\omega}{1000}\right)$

2.10.3. Potencial Complejo en Mecánica de Fluidos

Flujo alrededor de un cilindro:

El potencial complejo para flujo uniforme alrededor de un cilindro circular es:

$$F(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

donde U es la velocidad del flujo y a es el radio del cilindro.

Caso práctico: Cilindro de radio $a = 0.5 \, \text{m}$ en flujo de $U = 10 \, \text{m/s}$:

$$F(z) = 10 \left(z + \frac{0.25}{z} \right)$$

Velocidades:

$$V_x - iV_y = \frac{dF}{dz} = 10 \left(1 - \frac{0.25}{z^2} \right)$$

En el punto $z = i$ (sobre el eje vertical, a 1 m del centro, es decir, 0.5 m por encima de la superficie del cilindro):

$$\left. \frac{dF}{dz} \right|_{z=i} = 10 \left(1 - \frac{0.25}{-1} \right) = 10(1 + 0.25) = 12.5$$

La velocidad es 12.5 m/s en dirección horizontal. Sobre la propia superficie, en $z = 0.5i$, se obtiene $\frac{dF}{dz} = 10 \left(1 - \frac{0.25}{-0.25} \right) = 20 \text{ m/s} = 2U$, la velocidad máxima del flujo.

2.10.4. Análisis de Campos Electromagnéticos

Potencial Electrostático:

Para dos hilos rectilíneos infinitos, perpendiculares al plano, con densidades de carga $+\lambda$ en $z = a$ y $-\lambda$ en $z = -a$ (en dos dimensiones, el potencial de una carga es logarítmico), el potencial complejo es:

$$\Omega(z) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{z+a}{z-a} \right), \quad \Phi(x,y) = \text{Re } \Omega(z)$$

Caso práctico: Dipolo lineal con $\lambda = 10^{-9} \text{ C/m}$ y $a = 0.01 \text{ m}$:

$$\Omega(z) = \frac{10^{-9}}{2\pi \times 8.85 \times 10^{-12}} \ln \left(\frac{z+0.01}{z-0.01} \right) \approx 17.98 \ln \left(\frac{z+0.01}{z-0.01} \right) \text{ V}$$

Campo eléctrico:

$$E_x - iE_y = -\frac{d\Omega}{dz} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{2a}{z^2 - a^2}$$

2.10.5. Transformaciones Conformes en Transferencia de Calor

Mapeo de geometrías complejas:

La transformación $w = z^2$ mapea el primer cuadrante del plano z a la mitad superior del plano w .

Caso práctico: Conducción de calor en una esquina de 90° :

Si la temperatura en el plano w es $T(u,v) = \frac{v}{\pi} \times 100^\circ\text{C}$, entonces en el plano z :

- $z^2 = u + iv$
- $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv$
- $u = x^2 - y^2, v = 2xy$
- $T(x,y) = \frac{2xy}{\pi} \times 100^\circ\text{C}$

Para el punto (1,1):

$$T(1,1) = \frac{2 \times 1 \times 1}{\pi} \times 100 = \frac{200}{\pi} \approx 63.7^\circ\text{C}$$

2.10.6. Análisis de Oscilaciones en Estructuras

Función de respuesta dinámica:

Para una estructura con un grado de libertad:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2i\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

donde ω_n es la frecuencia natural y ζ es el factor de amortiguamiento.

Caso práctico: Edificio con $\omega_n = 2\pi$ rad/s y $\zeta = 0.05$:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 + 0.1i\frac{\omega}{2\pi}}$$

Para excitación a $\omega = 2\pi$ rad/s (resonancia):

- $H(2\pi) = \frac{1}{1-1+0.1i} = \frac{1}{0.1i} = -10i$
- $|H(2\pi)| = 10$ (amplificación de 10 veces)

2.11. CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS

Las funciones de variable compleja constituyen una herramienta matemática de extraordinaria potencia y elegancia, con aplicaciones directas en múltiples ramas de la ingeniería:

1. **Unificación conceptual:** Proporciona un marco unificado para el análisis de sistemas lineales
2. **Simplificación analítica:** Transforma problemas bidimensionales complejos en análisis unidimensional
3. **Potencia computacional:** Facilita el cálculo de integrales y la resolución de ecuaciones
4. **Aplicaciones versátiles:** Desde control automático hasta electromagnetismo y mecánica de fluidos

Próximos pasos: En cursos posteriores, estos conceptos se extenderán hacia:

- Transformadas integrales (Fourier, Laplace, Z)
- Teoría de sistemas lineales avanzada
- Métodos numéricos para análisis complejo
- Aplicaciones en procesamiento de señales

“La variable compleja no es solo una extensión del análisis real, sino una nueva dimensión que revela la estructura profunda de las matemáticas aplicadas.”

En la ingeniería moderna, dominar el análisis complejo es esencial para el diseño y análisis de sistemas avanzados.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

3.1. ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR EN LA INDUSTRIA

Las ecuaciones diferenciales de orden superior son fundamentales para modelar sistemas dinámicos complejos en la industria moderna. Desde el control de vibraciones en maquinaria pesada hasta el diseño de sistemas de suspensión automotriz, estas ecuaciones describen comportamientos que involucran múltiples derivadas de una función.

3.1.1. ¿Por qué necesitamos ecuaciones de orden superior?

Ejemplo de aplicación: Un sistema masa-resorte-amortiguador en un automóvil requiere una ecuación diferencial de segundo orden para describir completamente su comportamiento:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

donde m es la masa, c el coeficiente de amortiguamiento, k la constante del resorte, y $F(t)$ la fuerza externa aplicada.

3.2. PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

3.2.1. Ecuaciones Lineales de Orden Superior

Una ecuación diferencial lineal de orden n tiene la forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

Definición: Si $g(x) = 0$, la ecuación es **homogénea**; si $g(x) \neq 0$, es **no homogénea**.

3.2.2. Teorema del Principio de Superposición

Teorema: Sean $y_1, y_2, \dots, y_n$ soluciones de la ecuación homogénea de n -ésimo orden en un intervalo I . Entonces la combinación lineal:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

donde $c_1, c_2, \dots, c_n$ son constantes arbitrarias, también es una solución.

Ejemplos numéricos:

Ejemplo 1: Verificar que $y_1 = e^{-x}$ y $y_2 = xe^{-x}$ son soluciones de $y'' + 2y' + y = 0$

Para $y_1 = e^{-x}$:

- $y_1' = -e^{-x}$
- $y_1'' = e^{-x}$

Sustituyendo: $e^{-x} + 2(-e^{-x}) + e^{-x} = e^{-x} - 2e^{-x} + e^{-x} = 0 \checkmark$

Para $y_2 = xe^{-x}$:

- $y_2' = e^{-x} - xe^{-x}$
- $y_2'' = -2e^{-x} + xe^{-x}$

Sustituyendo: $(-2e^{-x} + xe^{-x}) + 2(e^{-x} - xe^{-x}) + xe^{-x} = 0 \checkmark$

Aplicación industrial: En sistemas de control, si dos señales son soluciones individuales, cualquier combinación lineal también lo será, permitiendo diseñar respuestas personalizadas.

3.3. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

3.3.1. Definiciones

Dependencia lineal: Un conjunto de funciones $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ es linealmente dependiente en un intervalo I si existen constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ (no todas cero) tales que:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

para toda x en el intervalo.

3.3.2. El Wronskiano

Definición: Para funciones $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ con al menos $(n - 1)$ derivadas, el Wronskiano es:

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Teorema: Si $W(x_0) \neq 0$ en algún punto $x_0 \in I$, las funciones son linealmente independientes en I . El recíproco no es cierto en general (por ejemplo, x^2 y $x|x|$ son independientes en $[-1, 1]$ y su Wronskiano es idénticamente nulo), pero sí lo es cuando $f_1, \dots, f_n$ son soluciones de una misma ecuación diferencial lineal homogénea de orden n : en ese caso son linealmente independientes si y solo si $W \neq 0$ en I .

Ejemplos numéricos:**Ejemplo 1:** Verificar independencia de $f_1(x) = e^{3x}$ y $f_2(x) = e^{4x}$

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{4x} \\ 3e^{3x} & 4e^{4x} \end{vmatrix} = 4e^{7x} - 3e^{7x} = e^{7x} \neq 0$$

Por tanto, son linealmente independientes.

Ejemplo 2: Verificar dependencia de $f_1(x) = \cos^2(x)$ y $f_2(x) = \sin^2(x)$ y $f_3(x) = 1$ Como $\cos^2(x) + \sin^2(x) - 1 = 0$, son linealmente dependientes.

3.4. ECUACIONES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

3.4.1. Ecuación Característica

Para la ecuación $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$, la ecuación característica es:

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_1 m + a_0 = 0$$

3.4.2. Casos de Solución

1. **Raíces reales distintas:** Si $m_1, m_2, \dots, m_n$ son distintas, entonces:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x}$$

2. **Raíces repetidas:** Si m_1 tiene multiplicidad k , entonces:

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_k x^{k-1}) e^{m_1 x} + \dots$$

3. **Raíces complejas:** Si $m = \alpha \pm \beta i$, entonces:

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$$

Ejemplos numéricos:**Ejemplo 1:** Resolver $y''' + 3y'' - 4y = 0$ Ecuación característica: $m^3 + 3m^2 - 4 = 0$ Factorizando: $(m - 1)(m + 2)^2 = 0$ Raíces: $m_1 = 1, m_2 = m_3 = -2$ (multiplicidad 2)Solución: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}$ **Ejemplo 2:** Resolver $y'' + 4y = 0$ Ecuación característica: $m^2 + 4 = 0$

Raíces: $m = \pm 2i$

Solución: $y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$

Aplicación industrial: Las vibraciones libres de una viga se modelan con ecuaciones similares, donde las raíces complejas indican oscilaciones.

3.5. ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS: MÉTODOS DE SOLUCIÓN

3.5.1. Estructura de la Solución

Para la ecuación $ay'' + by' + cy = g(x)$, la solución general es:

$$y = y_h + y_p$$

donde y_h es la solución homogénea y y_p es una solución particular.

3.5.2. Método de Coeficientes Indeterminados

Casos comunes:

$g(x)$	Forma de y_p
A (constante)	A_0
$Ax + B$	$A_0x + A_1$
Ae^{kx}	A_0e^{kx}
$A \cos(kx) + B \sin(kx)$	$A_0 \cos(kx) + A_1 \sin(kx)$

REGLA CRÍTICA: Multiplicación por x^s :

Si algún término de la forma propuesta y_p ya es solución de la ecuación homogénea, multiplica toda la forma por x^s donde s es la multiplicidad de esa raíz en la ecuación característica.

Ejemplo numérico:

Resolver $y'' - 3y' + 2y = 4e^x$

1. Solución homogénea: $m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow (m - 1)(m - 2) = 0$ $y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}$
2. Como e^x ya está en y_h , probamos $y_p = Axe^x$ $y_p' = A(1 + x)e^x$, $y_p'' = A(2 + x)e^x$
3. Sustituyendo: $A(2 + x)e^x - 3A(1 + x)e^x + 2Axe^x = 4e^x$ $A(2 + x - 3 - 3x + 2x)e^x = 4e^x$
 $A(-1)e^x = 4e^x \Rightarrow A = -4$
4. Solución general: $y = c_1e^x + c_2e^{2x} - 4xe^x$

3.5.3. Método de Variación de Parámetros

Para $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ con soluciones homogéneas y_1, y_2 :

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx$$

donde W es el Wronskiano de y_1 y y_2 .

3.6. TRANSFORMADA DE LAPLACE

3.6.1. Definición

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ se define como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

3.6.2. Transformadas Básicas

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$

Propiedades útiles (con $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$):

$f(t)$	$F(s)$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$ (desplazamiento en frecuencia)
$t f(t)$	$-F'(s)$
$u(t-a)f(t-a)$	$e^{-as} F(s)$ (desplazamiento temporal, $a > 0$)
$\delta(t-a)$	e^{-as}

Ejemplos numéricos:

Ejemplo 1: Calcular $\mathcal{L}\{3t^2 + 2e^{-4t}\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{3t^2 + 2e^{-4t}\} &= 3\mathcal{L}\{t^2\} + 2\mathcal{L}\{e^{-4t}\} \\ &= 3 \cdot \frac{2!}{s^3} + 2 \cdot \frac{1}{s+4} = \frac{6}{s^3} + \frac{2}{s+4}\end{aligned}$$

3.6.3. Aplicación a Ecuaciones Diferenciales

Si anotamos $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$ tenemos :

Propiedad clave:

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

y de manera general

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}\} = s^nY(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k}y^{(k)}(0)$$

Ejemplo: Resolver $y'' + 4y = 0$ con $y(0) = 1, y'(0) = 0$

1. Aplicando Laplace: $s^2Y(s) - s(1) - 0 + 4Y(s) = 0$
2. Despejando: $Y(s)(s^2 + 4) = s$
3. $Y(s) = \frac{s}{s^2+4}$
4. Transformada inversa: $y(t) = \cos(2t)$

3.7. APLICACIONES INDUSTRIALES

3.7.1. Sistemas de Suspensión Automotriz

Un sistema de suspensión se modela como:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

donde:

- $m = 1500$ kg (masa del vehículo)
- $c = 3000$ N·s/m (amortiguamiento)
- $k = 50000$ N/m (rigidez del resorte)

3.7.2. Vibraciones en Maquinaria

Las vibraciones en una máquina rotativa se describen por:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + c \frac{d\theta}{dt} + k\theta = M(t)$$

donde J es el momento de inercia, c el amortiguamiento rotacional, k la rigidez torsional, y $M(t)$ el momento aplicado.

3.7.3. Circuitos Eléctricos RLC

Un circuito RLC en serie se gobierna por:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V(t)$$

donde L es la inductancia, R la resistencia, C la capacitancia, q la carga, y $V(t)$ el voltaje aplicado.

Recuadro: parámetros del oscilador amortiguado. Dividiendo $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$ por m se obtiene $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = F(t)/m$, con frecuencia natural $\omega_n = \sqrt{k/m}$ y factor de amortiguamiento $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$. Las raíces características $-\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ dan tres regímenes: $\zeta < 1$ subamortiguado (oscila), $\zeta = 1$ crítico y $\zeta > 1$ sobreamortiguado. Estas son las magnitudes que se usan en los ejercicios y casos de este capítulo.

3.8. EJERCICIOS BÁSICOS FUNDAMENTALES

3.8.1. Ejercicio Básico 1: Verificación de Soluciones

Verificar que $y_1 = e^{2x}$ y $y_2 = e^{-x}$ son soluciones de $y'' - y' - 2y = 0$

Solución:

Para $y_1 = e^{2x}$:

- $y_1' = 2e^{2x}, y_1'' = 4e^{2x}$
- Sustituyendo: $4e^{2x} - 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0\checkmark$

Para $y_2 = e^{-x}$:

- $y_2' = -e^{-x}, y_2'' = e^{-x}$
- Sustituyendo: $e^{-x} - (-e^{-x}) - 2e^{-x} = 0\checkmark$

3.8.2. Ejercicio Básico 2: Wronskiano

Calcular el Wronskiano de $y_1 = \cos(x)$ y $y_2 = \sin(x)$

Solución:

- $W(\cos x, \sin x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$
 $= \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$

Por tanto, son linealmente independientes.

3.8.3. Ejercicio Básico 3: Ecuación Característica

Resolver $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

Solución:

- Ecuación característica: $m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0$

- Factorizando: $(m-1)(m-2)(m-3) = 0$
- Raíces: $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 3$
- Solución: $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$

3.8.4. Ejercicio Básico 4: Transformada de Laplace

Calcular $\mathcal{L}\{t^3 + 4\cos(2t)\}$

Solución:

- $\mathcal{L}\{t^3 + 4\cos(2t)\} = \mathcal{L}\{t^3\} + 4\mathcal{L}\{\cos(2t)\}$
- $= \frac{3!}{s^4} + 4 \cdot \frac{s}{s^2+4} = \frac{6}{s^4} + \frac{4s}{s^2+4}$

3.8.5. Ejercicio Básico 5: Coeficientes Indeterminados

Resolver $y'' + 4y = 8\sin(2x)$

Solución:

- 1. Solución homogénea: $m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2i, y_h = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$
- 2. Como $\sin(2x)$ está en y_h , probamos $y_p = Ax \cos(2x) + Bx \sin(2x)$
- 3. Calculando derivadas y sustituyendo: $y_p'' + 4y_p = -4A \sin(2x) + 4B \cos(2x) = 8\sin(2x)$,
luego $A = -2, B = 0$
- 4. Solución general: $y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) - 2x \cos(2x)$

3.9. EJERCICIOS PRÁCTICOS INDUSTRIALES

3.9.1. Ejercicio 1: Sistema de Suspensión Automotriz

Un automóvil con masa $m = 1200$ kg tiene un sistema de suspensión con:

- Constante de resorte: $k = 18000$ N/m
- Coeficiente de amortiguamiento: $c = 2400$ N·s/m

Determinar:

- a) La ecuación diferencial del sistema
- b) El tipo de amortiguamiento (subamortiguado, crítico, sobreamortiguado)
- c) La respuesta libre del sistema con condiciones iniciales $x(0) = 0.05$ m, $\dot{x}(0) = 0$

Solución:

a) Ecuación: $1200 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2400 \frac{dx}{dt} + 18000x = 0$

Simplificando: $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 15x = 0$

b) Ecuación característica: $m^2 + 2m + 15 = 0$

Discriminante: $\Delta = 4 - 60 = -56 < 0 \rightarrow$ **Subamortiguado**

Raíces: $m = -1 \pm i\sqrt{14}$

c) Solución: $x(t) = e^{-t}(c_1 \cos(\sqrt{14}t) + c_2 \sin(\sqrt{14}t))$

Con condiciones iniciales ($c_1 = 0.05, -c_1 + \sqrt{14}c_2 = 0$): $x(t) = 0.05e^{-t}(\cos(\sqrt{14}t) + \frac{1}{\sqrt{14}}\sin(\sqrt{14}t))$

3.9.2. Ejercicio 2: Circuito RLC

Un circuito RLC serie tiene:

- $L = 0.1$ H
- $R = 10 \Omega$
- $C = 0.01$ F
- Voltaje aplicado: $V(t) = 12 \cos(5t)$ V

Determinar la corriente $i(t)$ en estado estacionario

Solución:

- Ecuación: $0.1 \frac{d^2q}{dt^2} + 10 \frac{dq}{dt} + 100q = 12 \cos(5t)$
- Como $i = \frac{dq}{dt}$: $0.1 \frac{di}{dt} + 10i + 100 \int i dt = 12 \cos(5t)$
- Derivando: $0.1 \frac{d^2i}{dt^2} + 10 \frac{di}{dt} + 100i = -60 \sin(5t)$
- Solución particular: $i_p = A \cos(5t) + B \sin(5t)$
- Sustituyendo y resolviendo ($97.5A + 50B = 0, -50A + 97.5B = -60$): $A \approx 0.250$ A, $B \approx -0.487$ A
- Corriente estacionaria: $i(t) \approx 0.250 \cos(5t) - 0.487 \sin(5t)$ A

3.9.3. Ejercicio 3: Vibraciones en Maquinaria

Una máquina industrial de 500 kg está montada sobre amortiguadores que pueden modelarse como un sistema masa-resorte-amortiguador. Las mediciones muestran:

- Frecuencia natural: $f_n = 2$ Hz
- Factor de amortiguamiento: $\zeta = 0.3$

Calcular:

- Los parámetros k y c del sistema
- La respuesta a una fuerza externa $F(t) = 100 \cos(8t)$ N

Solución:

a) Frecuencia natural: $\omega_n = 2\pi f_n = 4\pi \text{ rad/s}$

$$\text{De } \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}: k = m\omega_n^2 = 500 \times (4\pi)^2 = 78957 \text{ N/m}$$

$$\text{De } \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}: c = 2\zeta\sqrt{km} = 2 \times 0.3 \times \sqrt{78957 \times 500} \approx 3770 \text{ N}\cdot\text{s/m}$$

b) Ecuación: $500 \frac{d^2x}{dt^2} + 3770 \frac{dx}{dt} + 78957x = 100 \cos(8t)$

Respuesta estacionaria usando análisis de frecuencia:

$$|H(i8)| = \frac{1}{\sqrt{(78957 - 500 \times 64)^2 + (3770 \times 8)^2}} \approx 1.79 \times 10^{-5} \text{ m/N}$$

$$\text{Respuesta: } x(t) \approx 1.79 \times 10^{-3} \cos(8t + \phi) \text{ m, con } \phi = -\arctan \frac{3770 \times 8}{78957 - 32000} \approx -32.7^\circ$$

3.10. CASOS DE ESTUDIO INDUSTRIAL

3.10.1. Caso 1: Control de Vibraciones en Edificios

Problema: Un rascacielos de 200 m de altura experimenta vibraciones debido al viento. El edificio puede modelarse como una viga en voladizo con las siguientes características:

Datos:

- Masa modal: $m = 5 \times 10^6 \text{ kg}$
- Rigidez modal: $k = 8 \times 10^8 \text{ N/m}$
- Factor de amortiguamiento: $\zeta = 0.02$
- Fuerza del viento: $F(t) = 10^6 \cos(0.5t) \text{ N}$

Análisis:

- Ecuación de movimiento: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$
- Frecuencia natural: $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8 \times 10^8}{5 \times 10^6}} = 12.65 \text{ rad/s}$
- Período natural: $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0.497 \text{ s}$
- Amortiguamiento: $c = 2\zeta m\omega_n = 2 \times 0.02 \times 5 \times 10^6 \times 12.65 = 2.53 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{s/m}$

Solución de estado estacionario:

- Razón de frecuencias: $r = \frac{0.5}{12.65} = 0.0395$
- Factor de amplificación: $H = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-0.00156)^2 + (0.00158)^2}} = 1.0$
- Desplazamiento máximo: $x_{max} = \frac{F_0}{k} \times H = \frac{10^6}{8 \times 10^8} \times 1.0 = 1.25 \text{ mm}$

Conclusión: El edificio es estable bajo estas condiciones de viento, pero se recomienda instalar amortiguadores adicionales para reducir las vibraciones.

3.10.2. Caso 2: Optimización de Suspensión en Vehículo de Carga

Problema: Una empresa de transporte necesita optimizar la suspensión de sus camiones para mejorar el confort y reducir el desgaste de la carga.

Datos del vehículo:

- Masa total: $m = 25000$ kg
- Configuración actual: $k = 600000$ N/m, $c = 40000$ N·s/m
- Perturbación del camino: $y(t) = 0.05 \sin(2\pi t)$ m (velocidad 60 km/h, rugosidad cada 16.67 m)

Análisis del sistema actual:

- Ecuación de movimiento (desplazamiento absoluto x de la masa): $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$
- donde $y(t)$ es la excitación del camino.
- Frecuencia de excitación: $\omega = 2\pi$ rad/s
- Frecuencia natural: $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{600000}{25000}} = 4.90$ rad/s
- Factor de amortiguamiento: $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{40000}{2\sqrt{600000 \times 25000}} = 0.163$

Transmisibilidad:

- $T = \sqrt{\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$ donde $r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2\pi}{4.90} = 1.28$
- $T = \sqrt{\frac{1+(2 \times 0.163 \times 1.28)^2}{(1-1.28^2)^2+(2 \times 0.163 \times 1.28)^2}} \approx 1.41$

Propuesta de mejora:

Reducir la rigidez a $k = 400000$ N/m y ajustar el amortiguamiento:

- Nueva frecuencia natural: $\omega_n = 4.0$ rad/s
- Nuevo factor de amortiguamiento óptimo: $\zeta = 0.35$
- Nuevo coeficiente: $c = 2 \times 0.35 \times \sqrt{400000 \times 25000} = 70000$ N·s/m
- Nueva transmisibilidad (con $r = 2\pi/4 = 1.57$): $T \approx 0.81$ (mejora de aproximadamente el 43 %)

3.10.3. Caso 3: Sistema de Control de Grúa Torre

Problema: Diseñar el sistema de control para minimizar las oscilaciones de la carga en una grúa torre de 50 m de altura.

Modelo del sistema:

La oscilación del cable puede modelarse como un péndulo simple con amortiguamiento:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{d\theta}{dt} + \omega_n^2\theta = \frac{a(t)}{L} \cos(\theta)$$

donde:

- $L = 30$ m (longitud del cable)
- $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{9.81}{30}} = 0.572$ rad/s
- $\zeta = 0.05$ (amortiguamiento del aire)
- $a(t)$ es la aceleración horizontal de la grúa

Estrategia de control:

Para minimizar oscilaciones, la aceleración no debe excitar la frecuencia natural (una entrada $A \sin(\omega_n t)$ sería resonante y las aumentaría). Una estrategia sencilla es mantener una aceleración constante A durante exactamente un período natural $T_n = 2\pi/\omega_n \approx 11$ s (o un múltiplo entero), y lo mismo en el frenado con $-A$: al terminar la maniobra, la oscilación residual se anula (salvo el pequeño efecto del amortiguamiento).

Simulación numérica (modelo linealizado):

Con aceleración $A = 0.5$ m/s²:

- Aceleración constante durante $T_n/2 \approx 5.5$ s: oscilación residual $\theta_{max} \approx 5.4^\circ$
- Aceleración constante durante $T_n \approx 11$ s: oscilación residual $\theta_{max} \approx 0.8^\circ$ (reducción de aproximadamente el 85 %)

3.11. CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS

Las ecuaciones diferenciales de orden superior son herramientas esenciales para el análisis y diseño de sistemas dinámicos industriales. Su dominio permite:

1. **Modelado preciso:** Sistemas complejos requieren múltiples derivadas para su descripción completa
2. **Análisis de estabilidad:** El estudio de raíces características determina el comportamiento del sistema
3. **Optimización de diseño:** Los parámetros pueden ajustarse para lograr respuestas deseadas
4. **Control avanzado:** Base para técnicas de control moderno y filtrado de señales

Próximos pasos: Estos conceptos se extienden hacia:

- Sistemas de ecuaciones diferenciales (análisis modal)
- Control óptimo y robusto
- Análisis no lineal y teoría del caos
- Elementos finitos para sistemas distribuidos

“En ingeniería, las ecuaciones diferenciales no son solo matemáticas; son el lenguaje que describe cómo funciona nuestro mundo físico”

En la era de la automatización y la Industria 4.0, estas herramientas matemáticas son más relevantes que nunca.

4. SERIES DE FOURIER Y ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

4.1. ANÁLISIS FRECUENCIAL EN LA INDUSTRIA

En la ingeniería moderna, el análisis de señales periódicas y la modelación de fenómenos físicos mediante ecuaciones diferenciales parciales son herramientas fundamentales. Las series de Fourier permiten descomponer señales complejas en componentes sinusoidales simples, mientras que las ecuaciones diferenciales parciales describen la distribución de cantidades físicas en el espacio y tiempo.

4.1.1. ¿Por qué necesitamos series de Fourier en la industria?

Ejemplo de aplicación: En el análisis de vibraciones de una máquina industrial, la señal vibratoria $f(t)$ contiene múltiples frecuencias. Mediante series de Fourier podemos identificar:

- Frecuencia fundamental de rotación
- Armónicas indicativas de desequilibrio
- Componentes de alta frecuencia que señalan problemas en rodamientos

4.1.2. ¿Por qué estudiamos ecuaciones diferenciales parciales?

Otro **Ejemplo de aplicación:** La distribución de temperatura en una placa metálica durante un proceso de soldadura se describe por la ecuación del calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

donde $T(x,y,t)$ es la temperatura, α es la difusividad térmica del material.

Recuadro de repaso: derivadas parciales. Si $u(x,t)$ depende de varias variables, $\frac{\partial u}{\partial x}$ se calcula derivando respecto de x y tratando t como constante (y análogamente $\frac{\partial u}{\partial t}$). Las derivadas segundas $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, ... se obtienen repitiendo el proceso, y el laplaciano es $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Ejemplo: si $u = e^{-t} \sin x$, entonces $u_t = -e^{-t} \sin x$ y $u_{xx} = -e^{-t} \sin x$, luego u satisface $u_t = u_{xx}$. Para repasar estos conceptos (y el gradiente), consulta el capítulo 7, «Derivadas parciales y gradiente», del manual de Matemáticas I.

4.2. FUNCIONES ORTOGONALES

4.2.1. Producto Interno de Funciones

Definición: El producto interno de dos funciones f_1 y f_2 en un intervalo $[a, b]$ es:

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx$$

4.2.2. Ortogonalidad

Definición: Dos funciones f_1 y f_2 son **ortogonales** en $[a, b]$ si:

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = 0$$

Un conjunto de funciones $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots\}$ es ortogonal si:

- $(\phi_m, \phi_n) = 0$ cuando $m \neq n$

Ejemplos numéricos:

Ejemplo 1: Verificar que $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x^3$ son ortogonales en $[-1, 1]$

- $(f_1, f_2) = \int_{-1}^1 x^2 \cdot x^3 dx = \int_{-1}^1 x^5 dx$
- $= \left[\frac{x^6}{6} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0 \checkmark$

Ejemplo 2: Verificar que $f_1(x) = \cos(x)$ y $f_2(x) = \sin^2(x)$ son ortogonales en $[0, \pi]$

$$(f_1, f_2) = \int_0^\pi \cos(x) \sin^2(x) dx$$

Usando sustitución $u = \sin(x)$, $du = \cos(x)dx$:

$$= \int_0^0 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^0 = 0 \checkmark$$

4.2.3. Conjuntos Ortonormales

Definición: La norma de una función $\phi(x)$ es:

$$\|\phi(x)\| = \sqrt{(\phi, \phi)} = \sqrt{\int_a^b \phi^2(x) dx}$$

Ejemplo: Para el conjunto $\{1, \cos(x), \cos(2x), \dots\}$ en $[-\pi, \pi]$:

Norma de la función constante:

- $\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi$
- $\|1\| = \sqrt{2\pi}$

Norma de las funciones coseno:

- $\|\cos(nx)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \pi$ (para $n \geq 1$)
- $\|\cos(nx)\| = \sqrt{\pi}$

4.3. SERIES DE FOURIER

4.3.1. Serie de Fourier Trigonométrica

Para una función periódica $f(x)$ con período 2π :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

donde los coeficientes son:

- $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$
- $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$
- $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$

4.3.2. Serie de Fourier para Período Arbitrario

Para una función con período $2L$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)]$$

Coeficientes:

- $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$
- $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$
- $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

Ejemplos numéricos:

Ejemplo 1: Encontrar la serie de Fourier de la función onda cuadrada:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Solución:

Como $f(x)$ es impar, $a_0 = a_n = 0$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \end{aligned}$$

Para n impar: $b_n = \frac{4}{n\pi}$

Para n par: $b_n = 0$

Serie de Fourier:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right]$$

Convergencia (teorema de Dirichlet). Si f es periódica y a trozos derivable, su serie de Fourier converge a $f(x)$ en los puntos de continuidad y, en un salto, a la media $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$. En la onda cuadrada, la serie vale 0 en $x = 0$ y $x = \pm\pi$. Cerca de los saltos, las sumas parciales se pasan de largo en torno a un 9% del salto (fenómeno de Gibbs), por muchos términos que se tomen.

Ejemplo 2: Serie de Fourier de $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$

Solución:

Como $f(x)$ es impar, $a_0 = a_n = 0$:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx$$

Integrando por partes:

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Serie de Fourier:

$$f(x) = 2 \left[\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \dots \right]$$

4.4. INTRODUCCIÓN A ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

4.4.1. Definición y Clasificación

Una ecuación diferencial parcial (EDP) involucra derivadas parciales de una función de varias variables. La forma general de segundo orden es:

$$F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

4.4.2. Clasificación por Tipo

Para la ecuación lineal de segundo orden:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

La clasificación depende del discriminante $\Delta = B^2 - 4AC$:

Parabólica $\Delta = 0$ (Ecuación del calor)

Elíptica $\Delta < 0$ (Ecuación de Laplace)

Hiperbólica $\Delta > 0$ (Ecuación de onda)

4.4.3. Ecuaciones Importantes en Ingeniería

Ecuación del calor (parabólica):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Ecuación de Laplace (elíptica):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Ecuación de onda (hiperbólica):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

4.5. MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

4.5.1. Aproximaciones de Diferencias Finitas

Las derivadas se aproximan mediante:

Primera derivada (hacia adelante):

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}$$

Primera derivada (centrada):

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

Segunda derivada (centrada):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

4.5.2. Discretización del Dominio

El dominio continuo se divide en una malla de puntos:

$$u(x_i, y_j) = u_{i,j} \text{ donde } x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y$$

Ejemplos numéricos:

Ejemplo 1: Discretizar $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4$ en $[0,1]$ con $\Delta x = 0.25$

Solución:

Puntos de malla: $x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1$

Diferencias finitas:

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(0.25)^2} &= 4 \\ \blacksquare u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} &= 0.25 \end{aligned}$$

Para $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \blacksquare u_2 - 2u_1 + u_0 &= 0.25 \\ \blacksquare u_3 - 2u_2 + u_1 &= 0.25 \\ \blacksquare u_4 - 2u_3 + u_2 &= 0.25 \end{aligned}$$

4.6. ECUACIONES PARABÓLICAS: TRANSFERENCIA DE CALOR

4.6.1. Ecuación del Calor en 1D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde $u(x,t)$ es la temperatura, k es la difusividad térmica.

4.6.2. Esquema Explícito de Diferencias Finitas

Discretización:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = k \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

Despejando $u_{i,j+1}$:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

$$\text{donde } \lambda = \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

Condición de estabilidad: $\lambda \leq 0.5$

Ejemplo numérico:

Problema: Barra de longitud $L = 1$ m con:

- Temperatura inicial: $u(x,0) = 25^\circ C$
- Extremos: $u(0,t) = 60^\circ C, u(1,t) = 40^\circ C$
- Difusividad: $k = 4 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
- Malla: $\Delta x = 0.25 \text{ m}, \Delta t = 0.1 \text{ s}$

Solución:

$$\lambda = \frac{4 \times 10^{-6} \times 0.1}{(0.25)^2} = 6.4 \times 10^{-6} \text{ (estable)}$$

Sistema inicial ($t = 0$):

$$u_{0,0} = 60, u_{1,0} = 25, u_{2,0} = 25, u_{3,0} = 25, u_{4,0} = 40$$

Primer paso temporal ($t = 0.1$):

- $u_{1,1} = 25 + 6.4 \times 10^{-6}(60 - 50 + 25) = 25.000224$
- $u_{2,1} = 25 + 6.4 \times 10^{-6}(25 - 50 + 25) = 25$
- $u_{3,1} = 25 + 6.4 \times 10^{-6}(25 - 50 + 40) = 25.000096$

4.7. ECUACIONES ELÍPTICAS: DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURA

4.7.1. Ecuación de Laplace en 2D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Esta ecuación describe la distribución de temperatura en estado estacionario.

4.7.2. Esquema de Diferencias Finitas

Discretización con $\Delta x = \Delta y$:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

Simplificando:

$$\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{(\Delta x)^2} = 0$$

Ejemplo numérico:

Problema: Placa rectangular 2×1.5 m con:

- Borde izquierdo: $T = 60^{\circ}C$
- Borde derecho: $T = 40^{\circ}C$
- Borde inferior: $T = 50^{\circ}C$
- Borde superior: $T = 80^{\circ}C$
- Malla: $\Delta x = \Delta y = 0.5 \text{ m}$

Solución:

Puntos interiores: $(0.5; 0.5)$, $(1.0; 0.5)$, $(1.5; 0.5)$, $(0.5; 1.0)$, $(1.0; 1.0)$, $(1.5; 1.0)$

Sistema de ecuaciones:

- $-4u_{1,1} + u_{2,1} + u_{1,2} = -110$
- $u_{1,1} - 4u_{2,1} + u_{3,1} + u_{2,2} = -50$
- $u_{2,1} - 4u_{3,1} + u_{3,2} = -90$
- $u_{1,1} - 4u_{1,2} + u_{2,2} = -140$
- $u_{2,1} + u_{1,2} - 4u_{2,2} + u_{3,2} = -80$
- $u_{3,1} + u_{2,2} - 4u_{3,2} = -120$

Resolviendo: $u_{1,1} = 57.99$, $u_{2,1} = 56.15$, $u_{3,1} = 51.33$, $u_{1,2} = 65.82$, $u_{2,2} = 65.28$, $u_{3,2} = 59.15$

Por ejemplo con el Método Matricial con MINVERSA en Excel

4.8. EJERCICIOS BÁSICOS FUNDAMENTALES

4.8.1. Ejercicio Básico 1: Ortogonalidad de Funciones

Verificar que $f_1(x) = \cos(2x)$ y $f_2(x) = \sin(3x)$ son ortogonales en $[-\pi, \pi]$

Solución:

$$(f_1, f_2) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x) \sin(3x) dx$$

Usando la identidad $\cos A \sin B = \frac{1}{2}[\sin(A + B) - \sin(A - B)]$:

- $= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(5x) - \sin(-x)] dx$
- $= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(5x) + \sin(x)] dx$
- $= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(5x)}{5} - \cos(x) \right]_{-\pi}^{\pi}$
- $= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{5} + 1 \right) - \left(\frac{1}{5} + 1 \right) \right] = 0 \checkmark$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	-4	1	0	1	0	0		-110
2	1	-4	1	0	1	0		-50
3	0	1	-4	0	0	1		-90
4	1	0	0	-4	1	0		-140
5	0	1	0	1	-4	1		-80
6	0	0	1	0	1	-4		-120
7								
8								
9	=MMULT(MINVERSA(A1:F6);H1:H6)							
10	56,1490683							
11	51,3250518							
12	65,8178054							
13	65,2795031							
14	59,1511387							

Figura 4.1: Resolución del sistema mediante el Método Matricial con MINVERSA en Excel. Se construye la matriz de coeficientes A , el vector de términos independientes b , y se aplica la fórmula matricial $=\text{MMULT}(\text{MINVERSA}(A1:F6),H1:H6)$ para obtener la solución.

(En $[0, \pi]$ la integral vale $\frac{6}{5} \neq 0$: la ortogonalidad depende del intervalo.)

4.8.2. Ejercicio Básico 2: Coeficientes de Fourier

Encontrar a_1 y b_1 para $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$

Solución:

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(x) dx$$

Como $x \cos(x)$ es impar: $a_1 = 0$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(x) dx$$

Integrando por partes con $u = x$, $dv = \sin(x) dx$:

$$b_1 = \frac{2}{\pi} [-x \cos(x) + \sin(x)]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} [\pi] = 2$$

4.8.3. Ejercicio Básico 3: Diferencias Finitas

Aproximar $\frac{d^2 u}{dx^2}$ en $x = 1$ para $u(x) = x^3$ usando $h = 0.1$

Solución:

$$\blacksquare \quad \frac{d^2 u}{dx^2} \approx \frac{u(1.1) - 2u(1) + u(0.9)}{(0.1)^2}$$

- $u(1.1) = (1.1)^3 = 1.331$
- $u(1) = 1^3 = 1$
- $u(0.9) = (0.9)^3 = 0.729$
- $\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{1.331 - 2(1) + 0.729}{0.01} = \frac{0.06}{0.01} = 6$

Valor exacto: $\frac{d^2u}{dx^2} = 6x$, en $x = 1$: $6(1) = 6\checkmark$

4.8.4. Ejercicio Básico 4: Ecuación del Calor

Resolver un paso del esquema explícito para la ecuación del calor con:

- $u_0 = 100, u_1 = 50, u_2 = 30, u_3 = 0$
- $k = 1, \Delta x = 1, \Delta t = 0.1$

Solución:

$$\lambda = \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1 \times 0.1}{1^2} = 0.1$$

- $u_1^{new} = u_1 + \lambda(u_0 - 2u_1 + u_2) = 50 + 0.1(100 - 100 + 30) = 53$
- $u_2^{new} = u_2 + \lambda(u_1 - 2u_2 + u_3) = 30 + 0.1(50 - 60 + 0) = 29$

4.8.5. Ejercicio Básico 5: Ecuación de Laplace

Para la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ con malla 2×2 , escribir la ecuación para el punto central (1,1) con condiciones de frontera $u(0,y) = 10, u(2,y) = 20, u(x,0) = 5, u(x,2) = 15$

Solución:

- $u_{0,1} + u_{2,1} + u_{1,0} + u_{1,2} - 4u_{1,1} = 0$
- Sustituyendo condiciones de frontera:
- $10 + 20 + 5 + 15 - 4u_{1,1} = 0$
- $u_{1,1} = \frac{50}{4} = 12.5$

4.9. EJERCICIOS PRÁCTICOS INDUSTRIALES

4.9.1. Ejercicio 1: Análisis de Vibraciones en Maquinaria

Una bomba centrífuga genera una señal vibratoria que se puede modelar como:

- $f(t) = 2 \sin(120\pi t) + 0.5 \sin(240\pi t) + 0.2 \sin(480\pi t)$ (mm/s)

Datos del sistema:

- Velocidad de rotación: 3600 RPM
- Frecuencia fundamental: $f_1 = 60$ Hz
- Tiempo de muestreo: 1 segundo

Determinar:

- a) Los coeficientes de Fourier correspondientes
- b) Interpretación del espectro vibratorio
- c) Diagnóstico del estado de la máquina

Solución:

- a) Frecuencias presentes:

- $f_1 = 60$ Hz ($1 \times$ fundamental) $\rightarrow$ Desbalance
- $f_2 = 120$ Hz ($2 \times$ fundamental) $\rightarrow$ Desalineación
- $f_3 = 240$ Hz ($4 \times$ fundamental) $\rightarrow$ Problemas en rodamientos

- Coeficientes de Fourier:

- $b_1 = 2$ (amplitud a 60 Hz)
- $b_2 = 0.5$ (amplitud a 120 Hz)
- $b_4 = 0.2$ (amplitud a 240 Hz)

- b) **Interpretación y diagnóstico:**

- Desbalance moderado (2 mm/s)
- Desalineación leve (0.5 mm/s)
- Desgaste incipiente en rodamientos (0.2 mm/s)

- c) **Diagnóstico y recomendaciones:**

- Balanceo dinámico del rotor
- Verificación de alineación
- Monitoreo de tendencia en rodamientos

4.9.2. Ejercicio 2: Transferencia de Calor en Tratamiento Térmico

Una pieza metálica cilíndrica de acero ($k = 45$ W/m·K, $\rho = 7850$ kg/m³, $c_p = 460$ J/kg·K) de diámetro $D = 50$ mm se calienta en un horno.

Condiciones:

- Temperatura inicial: $T_0 = 20^\circ\text{C}$
- Temperatura del horno: $T_\infty = 900^\circ\text{C}$
- Coeficiente de transferencia: $h = 25 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$
- Tiempo de calentamiento: 2 horas

Analizar:

- a) Ecuación diferencial que gobierna el proceso
- b) Distribución de temperatura usando diferencias finitas
- c) Tiempo para alcanzar 850°C en el centro

Solución:

a) Ecuación del calor en coordenadas cilíndricas:

- $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right)$
- donde $\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{45}{7850 \times 460} = 1.246 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

b) Discretización radial ($\Delta r = 2.5 \text{ mm}$, $\Delta t = 0.1 \text{ s}$, de modo que $\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta r)^2} \approx 0.20 \leq 0.25$, condición de estabilidad en el eje $r = 0$; con $\Delta t = 30 \text{ s}$ sería $\lambda \approx 60$ y el esquema explotaría):

- Esquema explícito:
- $T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta r)^2} \left[T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n + \frac{\Delta r}{2r_i} (T_{i+1}^n - T_{i-1}^n) \right]$

Condición de frontera en $r = R$

- $k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = h(T_\infty - T_R)$

c) Simulación numérica:

- Con la discretización propuesta, la temperatura del centro alcanza 850°C en aproximadamente **87 minutos** (despreciando la radiación). Como $Bi = hR/k \approx 0.014 \ll 0.1$, el modelo concentrado $t = \frac{\rho c_p R}{2h} \ln \frac{T_\infty - T_0}{T_\infty - 850} \approx 86 \text{ min}$ lo confirma.

4.9.3. Ejercicio 3: Distribución de Temperatura en Soldadura

Durante un proceso de soldadura por arco en una placa de acero de dimensiones $200 \times 100 \times 10 \text{ mm}$, se requiere analizar la distribución de temperatura.

Parámetros del proceso:

- Potencia del arco: $P = 2.5 \text{ kW}$
- Velocidad de soldadura: $v = 5 \text{ mm/s}$
- Eficiencia del proceso: $\eta = 0.8$

- Propiedades del acero: $k = 50 \text{ W/m}\cdot\text{K}$

Condiciones de frontera:

- Superficie superior: Convección con $h = 20 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$, $T_\infty = 25^\circ\text{C}$
- Bordes laterales: Temperatura fija $T = 25^\circ\text{C}$
- Superficie inferior: Aislada

Determinar:

- a) Campo de temperatura en estado pseudo-estacionario
- b) Gradientes térmicos máximos
- c) Zona afectada por el calor (HAZ)

Solución:

a) **Ecuación de Laplace modificada:**

- $\nabla^2 T + \frac{S(x,y)}{k} = 0$
- donde $S(x,y)$ es la fuente de calor distribuida según:
- $S(x,y) = \frac{\eta P}{\pi \sigma^2 e} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\right) \text{ (W/m}^3\text{)}$
- con $\sigma = 3 \text{ mm}$ (ancho efectivo del arco) y $e = 10 \text{ mm}$ el espesor de la placa

b) **Malla de diferencias finitas** ($\Delta x = \Delta y = 2 \text{ mm}$):

- Para punto interior (i,j) :
- $T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = -\frac{S_{i,j}\Delta x^2}{k}$

Resultados típicos

- Temperatura máxima: $\sim 1650^\circ\text{C}$ (centro del arco)
- HAZ ($T > 723^\circ\text{C}$): Radio $\approx 12 \text{ mm}$
- Gradiente máximo: $\sim 400^\circ\text{C/mm}$

c) **Zona afectada térmica:**

La HAZ se extiende hasta donde $T \geq 723^\circ\text{C}$ (temperatura de transformación del acero), abarcando aproximadamente un área de $\pi \times (12 \text{ mm})^2 = 452 \text{ mm}^2$.

4.10. CASOS DE ESTUDIO INDUSTRIAL

4.10.1. Caso 1: Optimización de Enfriamiento en Fundición

Problema: Una fundición de aluminio necesita optimizar el proceso de enfriamiento de piezas cilíndricas para minimizar tensiones térmicas y mejorar las propiedades mecánicas.

Datos del proceso:

- Material: Aleación de aluminio A356
- Dimensiones: Cilindro $\phi 100 \times 200$ mm
- Temperatura de colada: $T_0 = 720^\circ C$
- Medio de enfriamiento: Aire forzado a $T_\infty = 50^\circ C$
- Coeficiente de transferencia: $h = 100 \text{ W/m}^2 \cdot K$

Propiedades del material:

- Conductividad térmica: $k = 160 \text{ W/m} \cdot K$
- Densidad: $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$
- Calor específico: $c_p = 900 \text{ J/kg} \cdot K$

Análisis mediante series de Fourier:

La distribución de temperatura en función del tiempo se puede expresar como:

$$T(r,t) = T_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 \alpha t}$$

donde J_0 es la función de Bessel de primera especie y los λ_n son las raíces de:

$$\lambda R J_1(\lambda R) = Bi \cdot J_0(\lambda R)$$

con número de Biot: $Bi = \frac{hR}{k} = \frac{100 \times 0.05}{160} = 0.03125$

Resultados del análisis:

Primeras raíces características

- $\lambda_1 R = 0.249$, $\lambda_2 R = 3.840$, $\lambda_3 R = 7.020$, es decir, $\lambda_1 = 4.98 \text{ m}^{-1}$, $\lambda_2 = 76.8 \text{ m}^{-1}$, $\lambda_3 = 140.4 \text{ m}^{-1}$

Constantes de la serie

- $A_1 = 675.2^\circ C$, $A_2 = -7.1^\circ C$, $A_3 = 2.8^\circ C$

Tiempo de enfriamiento

- Para alcanzar $T_{centro} = 200^{\circ}C$: $t \approx 15$ minutos (como $Bi \ll 0.1$, la pieza se comporta casi como un sistema concentrado)

Gradientes térmicos máximos

- $\left| \frac{dT}{dr} \right|_{max} = \frac{h(T_0 - T_{\infty})}{k} \approx 0.42^{\circ}C/mm$ (en la superficie, al inicio del enfriamiento)

Optimización del proceso:**1. Enfriamiento por etapas:**

- Etapa 1: Aire natural (primeros minutos) $\rightarrow$ Reduce tensiones iniciales
- Etapa 2: Aire forzado (hasta alcanzar $200^{\circ}C$ en el centro) $\rightarrow$ Acelera enfriamiento final

2. Control de gradientes:

- Velocidad del aire variable: $v = 2 - 8$ m/s
- Reduce tensiones térmicas en 40 %

4.10.2. Caso 2: Análisis de Calidad en Soldadura por Láser

Problema: Una empresa automotriz requiere optimizar los parámetros de soldadura láser para unir chapas de acero de alta resistencia, minimizando la zona afectada por el calor (HAZ).

Parámetros del proceso:

- Potencia del láser: $P = 2 - 6$ kW
- Velocidad de soldadura: $v = 10 - 50$ mm/s
- Espesor de chapa: $e = 1.5$ mm
- Material: Acero DP600 ($k = 35$ W/m·K)

Modelo matemático mediante EDP:

La ecuación de calor en coordenadas móviles (siguiendo el láser):

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + S(x, y, t)$$

donde la fuente láser se modela como:

- $S(x, y, t) = \frac{\eta P}{\pi r_0^2 e} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{r_0^2} \right)$ (W/m³, con e el espesor de la chapa)

Solución mediante diferencias finitas:**Discretización adaptativa:**

- Malla fina cerca del láser: $\Delta x = \Delta y = 0.05$ mm
- Malla gruesa lejos del láser: $\Delta x = \Delta y = 0.2$ mm

- Paso temporal: $\Delta t = 0.001 \text{ s}$

Resultados para parámetros optimizados ($P = 3.5 \text{ kW}$, $v = 25 \text{ mm/s}$):

Temperaturas características:

- Pico de temperatura: $T_{max} = 2100^\circ\text{C}$
- Zona de fusión: $T > 1500^\circ\text{C} \rightarrow \text{Ancho} = 1.8 \text{ mm}$
- HAZ: $T > 723^\circ\text{C} \rightarrow \text{Ancho} = 4.2 \text{ mm}$

Ciclos térmicos:

- Velocidad de enfriamiento: $\dot{T} = 850^\circ\text{C/s}$
- Tiempo por encima de 723°C : $\Delta t = 0.65 \text{ s}$

Microestructura resultante:

- Zona de fusión: Martensita
- HAZ: Mezcla bainita-martensita
- Material base: Sin alteración

Optimización mediante análisis de Fourier:

El perfil de temperatura transversal se puede aproximar por:

$$T(y) = T_{max} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$$

donde σ es función de los parámetros del proceso:

- σ crece con el aporte de calor por unidad de longitud P/v (aproximadamente, $\sigma \propto \sqrt{P/v}$). Este perfil gaussiano es solo una aproximación cualitativa: no reproduce a la vez las anchuras de fusión y de HAZ obtenidas por diferencias finitas.

Criterios de calidad alcanzados:

- Penetración completa: 100 %
- HAZ mínima: 4.2 mm (objetivo: $< 5 \text{ mm}$)
- Ausencia de porosidad: 99.8 %
- Resistencia a tracción: $> 95 \%$ del material base

4.10.3. Caso 3: Control Térmico en Procesamiento de Semiconductores

Problema: En la fabricación de obleas de silicio, el control preciso de temperatura durante el proceso de recocido es crítico para las propiedades eléctricas finales.

Especificaciones del proceso:

- Dimensiones de oblea: $\phi 300$ mm, espesor 0.8 mm
- Rango de temperatura: 900-1100°C
- Uniformidad requerida: $\pm 2^\circ C$
- Tiempo de proceso: 30 minutos

Modelo térmico 2D:

Para la distribución radial de temperatura:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{q(r,t)}{\rho c_p}$$

donde $q(r,t)$ representa el calentamiento por resistencias distribuidas.

Control mediante serie de Fourier:

El perfil de calentamiento se diseña como:

$$q(r,t) = q_0 \left[1 + \sum_{n=1}^5 a_n \cos \left(\frac{n\pi r}{R} \right) \right]$$

Optimización de coeficientes:

Mediante análisis modal, los coeficientes óptimos son:

$$a_1 = -0.15, a_2 = 0.08, a_3 = -0.03, a_4 = 0.01, a_5 = -0.005$$

Resultados experimentales:**Uniformidad térmica alcanzada**

- Centro de la oblea: $T = 1000.0 \pm 0.8^\circ C$
- Borde de la oblea: $T = 1000.0 \pm 1.2^\circ C$
- Desviación estándar global: $\sigma_T = 1.1^\circ C$

Rendimiento del proceso

- Obtenido: 98.7 % de obleas dentro de especificación
- Objetivo: > 95 %
- Mejora sobre proceso anterior: +12 %

Impacto en propiedades eléctricas:

- Resistividad: Uniformidad mejorada en 25 %
- Movilidad de portadores: Incremento del 8 %
- Tiempo de vida de minoritarios: Mejora del 15 %

4.11. CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS

Las series de Fourier y las ecuaciones diferenciales parciales constituyen herramientas matemáticas fundamentales para el análisis y diseño de procesos industriales. Su aplicación permite:

1. **Análisis frecuencial:** Identificación de patrones y diagnóstico de problemas en señales complejas
2. **Modelado térmico:** Predicción y control de distribuciones de temperatura en procesos industriales
3. **Optimización de procesos:** Ajuste de parámetros para mejorar calidad y eficiencia
4. **Control predictivo:** Desarrollo de estrategias de control basadas en modelos matemáticos

Próximos pasos: Estos conceptos se extienden hacia:

- Análisis de elementos finitos para geometrías complejas
- Métodos espectrales para alta precisión
- Técnicas de control multivariable
- Inteligencia artificial aplicada a EDP

“En la industria moderna, el dominio del análisis matemático determina la capacidad de innovación y competitividad”

La combinación de series de Fourier y métodos numéricos para EDP abre nuevas posibilidades en la era de la simulación computacional y el gemelo digital.

5. INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS NUMÉRICO

5.1. LOS CÁLCULOS NUMÉRICOS EN LA INDUSTRIA

En el mundo industrial moderno, la mayoría de problemas matemáticos no tienen soluciones analíticas exactas. Desde la simulación de procesos térmicos hasta el análisis estructural, pasando por el control de procesos y la optimización de producción, los métodos numéricos proporcionan herramientas fundamentales para resolver problemas complejos con precisión controlada.

5.1.1. ¿Por qué necesitamos análisis numérico en la industria?

Ejemplo de aplicación: En el diseño de un intercambiador de calor, necesitamos resolver ecuaciones diferenciales parciales que modelan la transferencia de calor. Estas ecuaciones rara vez tienen soluciones analíticas, pero con métodos numéricos podemos obtener aproximaciones precisas que permiten optimizar el diseño y predecir el comportamiento del sistema.

5.1.2. La importancia de la precisión controlada

En ingeniería, no buscamos soluciones exactas sino **aproximaciones confiables** con error conocido y acotado. El análisis numérico nos proporciona:

- Métodos sistemáticos para aproximar soluciones
- Herramientas para controlar y estimar errores
- Algoritmos eficientes implementables en computadoras

5.2. FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS DE ERRORES

5.2.1. Tipos de Error

En los métodos numéricos encontramos diferentes fuentes de error:

5.2.1.1. Error de Redondeo

Se debe a la representación limitada de números en las computadoras.

Definiciones básicas:

Error absoluto $E = X - \tilde{X}$ donde X es el valor exacto y $\tilde{X}$ el aproximado

Error relativo $e = \frac{E}{X} \approx \frac{E}{\tilde{X}}$

Ejemplos numéricos:

- Valor exacto: $X = 536.78$
- Almacenado (4 cifras): $\tilde{X} = 536.7$
- Error absoluto: $E = 536.78 - 536.7 = 0.08$
- Error relativo: $e = \frac{0.08}{536.78} \approx 0.000149 = 0.0149 \%$

5.2.1.2. Error de Truncamiento

Ocurre al aproximar procesos infinitos (como series) con un número finito de términos.

5.2.2. Propagación de Errores

5.2.2.1. En la Suma

$$|E_{x+y}| \leq |E_x| + |E_y|$$

Ejemplo numérico:

- $x = 123.4 \pm 0.1, y = 567.8 \pm 0.2$
- $x + y = 691.2 \pm 0.3$

5.2.2.2. En la Multiplicación

$$|e_{xy}| \leq |e_x| + |e_y|$$

Ejemplo numérico:

- $x = 2.5 \pm 0.05$ ($e_x = 2 \%$), $y = 4.0 \pm 0.08$ ($e_y = 2 \%$)
- $xy = 10.0, e_{xy} \leq 4 \%$

5.2.3. Casos Críticos

5.2.3.1. Resta de Números Cercanos

La resta de números muy cercanos amplifica significativamente el error relativo.

Ejemplo crítico:

- $x = 578.1 \pm 0.05, y = 577.8 \pm 0.05$
- $x - y = 0.3$
- Error relativo: $\frac{0.05+0.05}{0.3} = 33.3 \%$

5.2.3.2. Suma de Números con Magnitudes Diferentes

Es preferible sumar comenzando por los números de menor magnitud.

5.3. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ECUACIONES NO LINEALES

5.3.1. Método de la Bisección

Para encontrar raíces de $f(x) = 0$ en un intervalo $[a, b]$ donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos.

Algoritmo:

1. Calcular $c = \frac{a+b}{2}$
2. Si $f(c) = 0$, entonces c es la raíz
3. Si $f(a)$ y $f(c)$ tienen signos opuestos, hacer $b = c$
4. Si no, hacer $a = c$
5. Repetir hasta que $|b - a| < \varepsilon$

Convergencia: Lineal, con error $|c_n - r| < \frac{b-a}{2^n}$

Ejemplos numéricos:

Para $f(x) = x^2 - 2$ en $[1, 2]$:

Iteración	a	b	c	$f(c)$
1	1.0	2.0	1.5	0.25
2	1.0	1.5	1.25	-0.4375
3	1.25	1.5	1.375	-0.109
4	1.375	1.5	1.4375	0.066

5.3.2. Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Convergencia: Cuadrática cuando $f'(r) \neq 0$

Ejemplos numéricos:

Para $f(x) = e^x - \pi x$ con $x_0 = 0.5$:

- $x_1 = 0.5 - \frac{e^{0.5} - \pi(0.5)}{e^{0.5} - \pi} = 0.5522$
- $x_2 = 0.5522 - \frac{e^{0.5522} - \pi(0.5522)}{e^{0.5522} - \pi} = 0.5538$
- $x_3 = 0.5538$ (convergencia)

Interpretación geométrica: Cada iteración traza la tangente a la curva y encuentra su intersección con el eje x .

Error típico: Newton no converge siempre. Si $f'(x_n) \approx 0$, la tangente es casi horizontal y el siguiente iterado se va lejos: con $f(x) = x^2 - 2$ y $x_0 = 0.6$ se salta a $x_1 \approx 1.97$ (figura 5.1), y con $x_0 = 0$ el

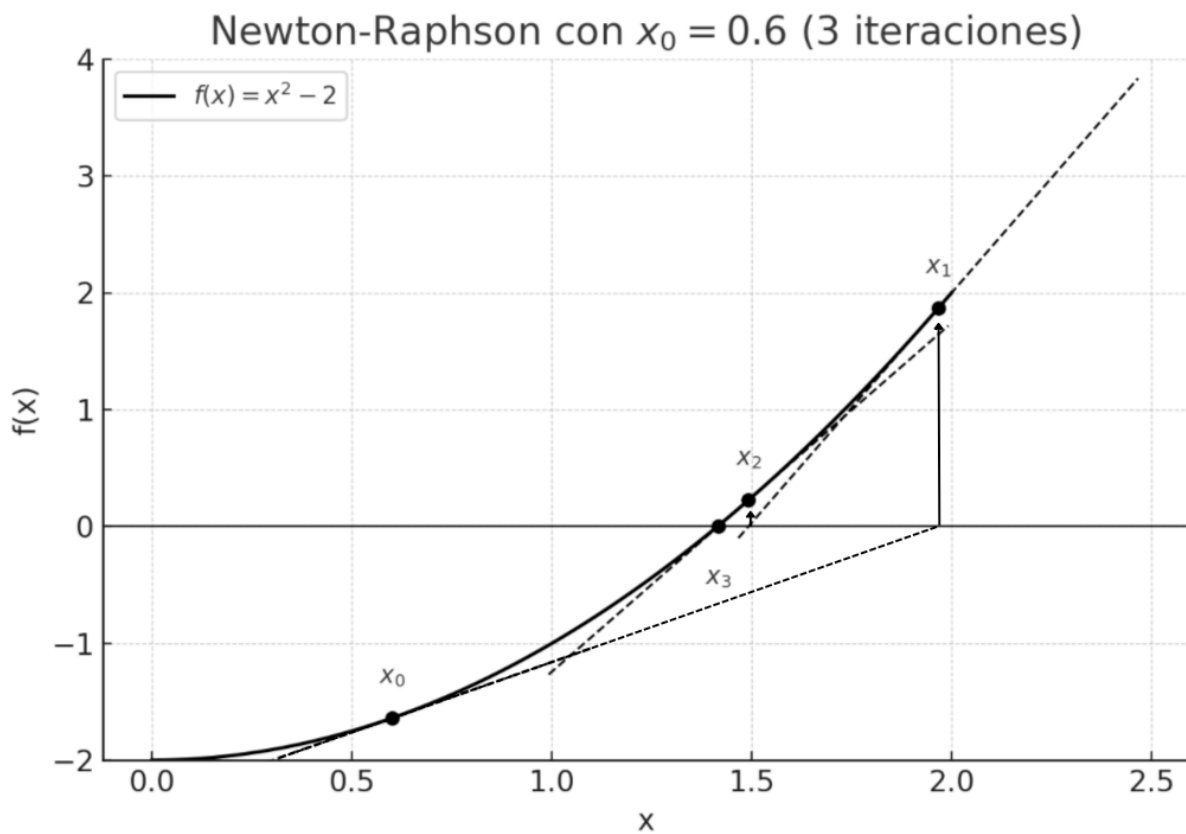


Figura 5.1: Método de Newton-Raphson aplicado a $f(x) = x^2 - 2$ con $x_0 = 0.6$. Se muestran tres iteraciones sucesivas que progresan visiblemente hacia la raíz $\sqrt{2}$.

método ni siquiera se puede aplicar. En la práctica se combina con la bisección: primero se acota la raíz y luego se afina con Newton.

5.4. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

5.4.1. Fórmula de los Trapecios

Aproxima la función con segmentos de recta:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

donde $h = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + ih$.

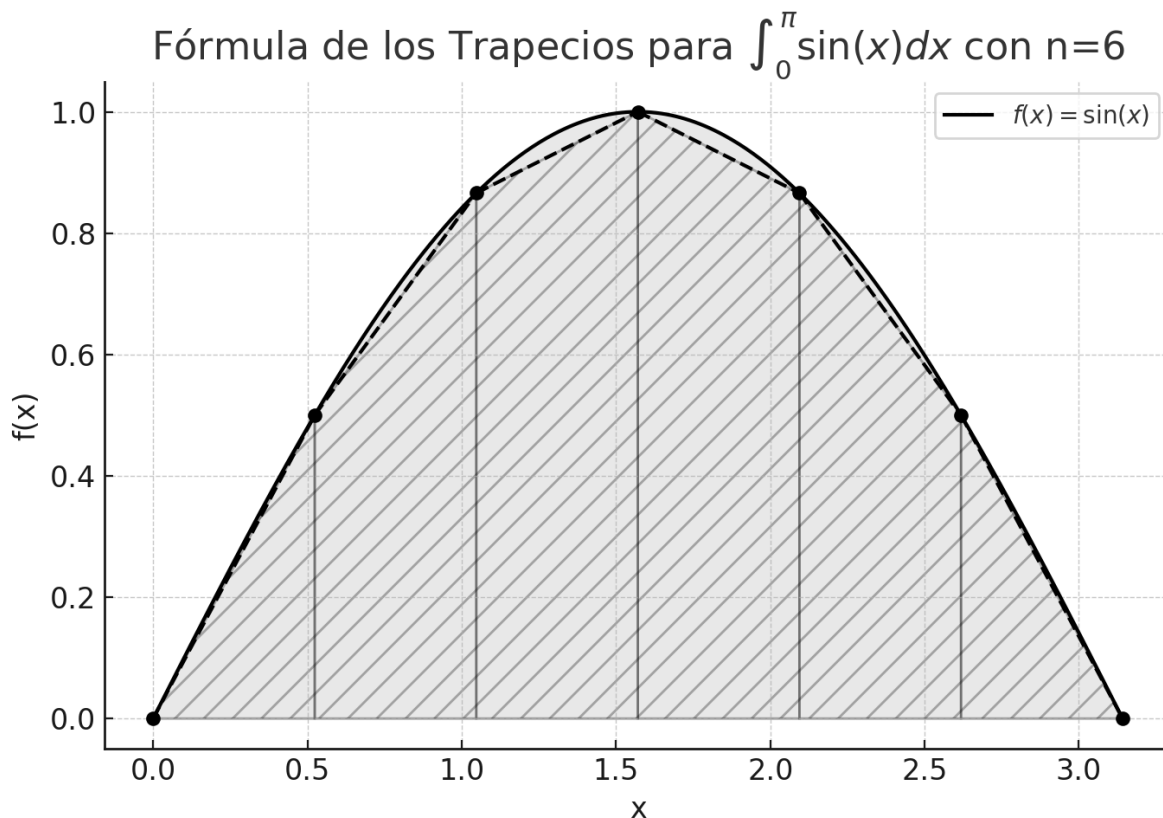


Figura 5.2: Ilustración de la Fórmula de los Trapecios. El área bajo la curva $f(x) = \sin(x)$ en $[0, \pi]$ se aproxima sumando los trapecios formados por los nodos $x_0, \dots, x_6$.

Error: $E = -\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi)$ para algún $\xi \in [a, b]$

Ejemplos numéricos:

Para $\int_0^1 e^x dx$ (valor exacto = $e - 1 \approx 1.7183$):

- Con $n = 4$: $h = 0.25$, resultado = 1.7272 (error = 0.52 %)
- Con $n = 8$: $h = 0.125$, resultado = 1.7205 (error = 0.13 %)

5.4.2. Fórmula de Simpson

Aproxima la función con parábolas (requiere n par):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + f(x_n)]$$

$$\text{Error: } E = -\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\xi)$$

Ejemplos numéricos:

Para el mismo integral $\int_0^1 e^x dx$:

- Con $n = 4$: resultado = 1.7183 (error = 0.002 %)
- Con $n = 8$: resultado = 1.7183 (error < 0.001 %)

Comentario: al duplicar n (reducir h a la mitad), el error del trapecio se divide por ≈ 4 (es $O(h^2)$) y el de Simpson por ≈ 16 (es $O(h^4)$). Con los datos anteriores, los cocientes son 3.997 y 15.9. Este cociente es una forma práctica de comprobar que un programa implementa bien la fórmula.

5.5. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

5.5.1. Método de Euler

Para $y' = f(x, y)$ con $y(x_0) = y_0$:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Error local: $O(h^2)$, **Error global:** $O(h)$

Ejemplos numéricos:

Para $y' = -y + x + 1$ con $y(0) = 1$ y $h = 0.1$:

- $y_1 = 1 + 0.1(-1 + 0 + 1) = 1.0$
- $y_2 = 1.0 + 0.1(-1.0 + 0.1 + 1) = 1.01$
- Solución exacta en $x = 0.1$: $y(0.1) = 1.00484$ (error significativo)

5.5.2. Método de Runge-Kutta de 4to Orden

- $K_1 = hf(x_n, y_n)$
- $K_2 = hf(x_n + h/2, y_n + K_1/2)$
- $K_3 = hf(x_n + h/2, y_n + K_2/2)$
- $K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3)$
- $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$

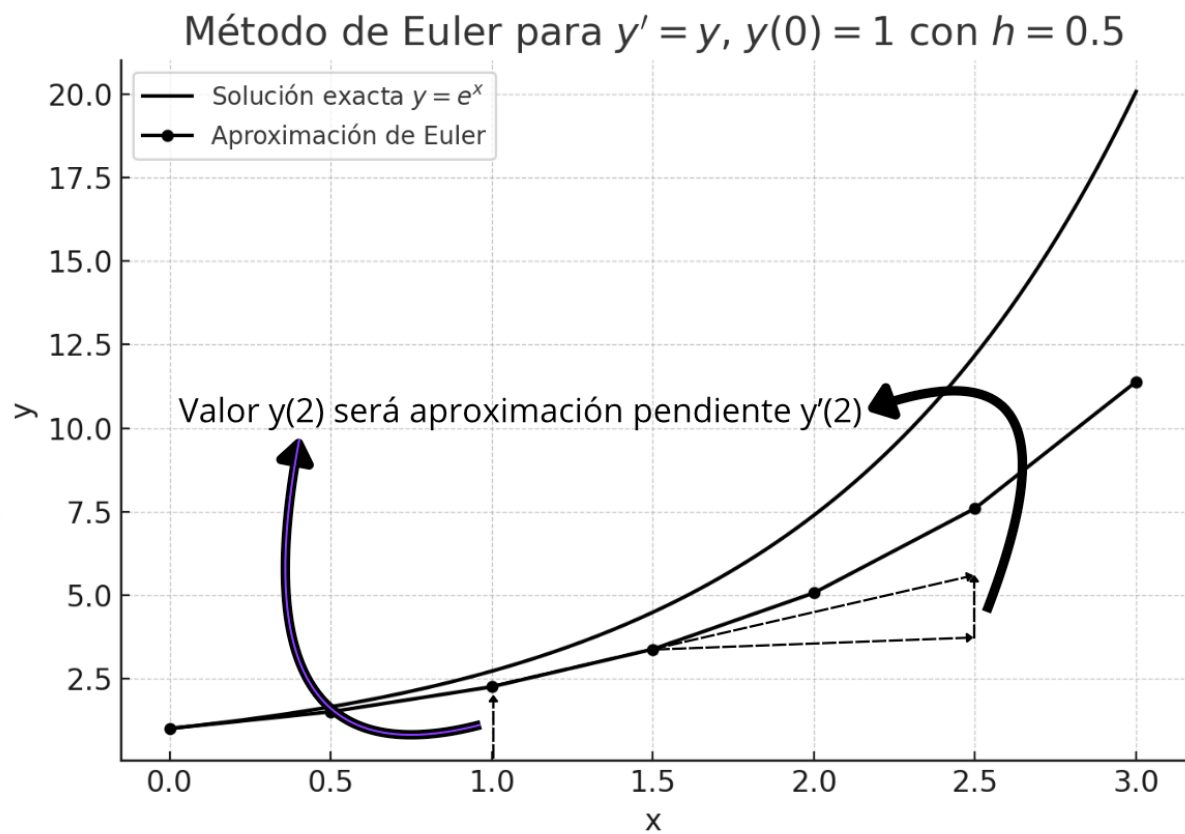


Figura 5.3: Método de Euler aplicado a $y' = y$ con condición inicial $y(0) = 1$. La curva negra muestra la solución exacta $y = e^x$, mientras que los puntos y segmentos indican la aproximación paso a paso con $h = 0.5$.

Error local: $O(h^5)$, **Error global:** $O(h^4)$

Ejemplos numéricos:

Para la misma ecuación anterior:

- $K_1 = 0.1(0) = 0.0$
- $K_2 = 0.1(-1 + 0.05 + 1) = 0.005$
- $K_3 = 0.1(-1.0025 + 0.05 + 1) = 0.00475$
- $K_4 = 0.1(-1.00475 + 0.1 + 1) = 0.009525$
- $y_1 = 1 + \frac{1}{6}(0 + 0.01 + 0.0095 + 0.009525) = 1.0048375$

¡Coincide con la solución exacta $y(0.1) = 1.0048374$ hasta la séptima cifra decimal en un solo paso (Euler daba 1.0)!

5.6. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

5.6.1. Aproximaciones por Diferencias Finitas

Para discretizar derivadas parciales:

Primera derivada:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}$$

Segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

5.6.2. Ecuación del Calor (Tipo Parabólico)

- $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Esquema explícito:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

donde $r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$

Condición de estabilidad: $r \leq 0.5$

Ejemplo numérico:

Para una barra con extremos a 0°C y condición inicial $u(x,0) = \sin(\pi x)$:

- $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.001, \alpha = 1$

- $r = \frac{1 \times 0.001}{(0.1)^2} = 0.1$ (estable)

5.7. EJERCICIOS BÁSICOS FUNDAMENTALES

5.7.1. Ejercicio Básico 1: Análisis de Error

Calcular el error en la suma de números con precisión limitada

Dados los números con 4 cifras significativas:

- $a = 123.4$ (error = ± 0.05)
- $b = 0.567$ (error = ± 0.0005)

Solución:

- $a + b = 123.4 + 0.567 = 123.967 \approx 124.0$
- Error absoluto total: $0.05 + 0.0005 = 0.0505$
- Error relativo: $\frac{0.0505}{124.0} = 0.041\%$

5.7.2. Ejercicio Básico 2: Método de la Bisección

Encontrar una raíz de $f(x) = x^3 - x - 1$ en $[1, 2]$ con precisión $\varepsilon = 0.01$

Solución:

- Iteración 1: $c_1 = 1.5$, $f(1.5) = 0.875 > 0 \rightarrow [1, 1.5]$
- Iteración 2: $c_2 = 1.25$, $f(1.25) = -0.296 < 0 \rightarrow [1.25, 1.5]$
- Iteración 3: $c_3 = 1.375$, $f(1.375) = 0.224 > 0 \rightarrow [1.25, 1.375]$
- Iteración 4: $c_4 = 1.3125$, $f(1.3125) = -0.051 < 0 \rightarrow [1.3125, 1.375]$
- Como $|1.375 - 1.3125| = 0.0625 > 0.01$, continuamos...
- Solución aproximada: $x \approx 1.325$

5.7.3. Ejercicio Básico 3: Integración Numérica

Calcular $\int_0^1 \sqrt{x} dx$ usando trapecio con $n = 4$

Solución:

- $h = \frac{1-0}{4} = 0.25$
- $x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1$
- $I \approx \frac{0.25}{2} [0 + 2(0.5) + 2(0.707) + 2(0.866) + 1]$
- $I \approx 0.125 [0 + 1 + 1.414 + 1.732 + 1] = 0.643$

- Valor exacto: $\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \approx 0.667$
- Error: $\frac{0.667-0.643}{0.667} = 3.6 \%$

5.7.4. Ejercicio Básico 4: Método de Euler

Resolver $y' = 2x + y$ **con** $y(0) = 1$, **calcular** $y(0.2)$ **con** $h = 0.1$

Solución:

- Paso 1: $y_1 = 1 + 0.1(2(0) + 1) = 1.1$, $x_1 = 0.1$
- Paso 2: $y_2 = 1.1 + 0.1(2(0.1) + 1.1) = 1.23$, $x_2 = 0.2$
- Resultado: $y(0.2) \approx 1.23$
- Solución exacta: $y(x) = 3e^x - 2x - 2$, $y(0.2) = 1.264$
- Error: $\frac{1.264-1.23}{1.264} \approx 2.7 \%$

5.7.5. Ejercicio Básico 5: Diferencias Finitas

Aproximar $\frac{d^2y}{dx^2}$ **en** $x = 1$ **usando** $y(0.9) = 0.81$, $y(1.0) = 1.0$, $y(1.1) = 1.21$

Solución:

- $h = 0.1$
- $\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{y(1.1) - 2y(1.0) + y(0.9)}{h^2}$
- $\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{1.21 - 2(1.0) + 0.81}{(0.1)^2} = \frac{0.02}{0.01} = 2$

5.8. APLICACIONES INDUSTRIALES

5.8.1. Simulación Térmica en Hornos Industriales

Problema: Determinar la distribución de temperatura en un horno de tratamiento térmico.

Ecuación del calor en 2D:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Parámetros industriales típicos:

- Dimensiones: $2\text{m} \times 1\text{m}$
- Difusividad térmica: $\alpha = 1.5 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
- Temperatura inicial: 20°C
- Temperatura paredes: 1200°C

Discretización:

- $\Delta x = 0.05 \text{ m}$, $\Delta y = 0.05 \text{ m}$
- $\Delta t = 0.1 \text{ s}$
- $r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1.5 \times 10^{-6} \times 0.1}{(0.05)^2} = 6 \times 10^{-5} < 0.25 \checkmark$ (la estabilidad permitiría hasta $\Delta t \approx 417 \text{ s}$; un paso menor se elige por precisión, no por estabilidad)

5.8.2. Análisis de Vibraciones en Estructuras

Problema: Determinar frecuencias naturales de una viga industrial.

Ecuación de la viga:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = \rho A \omega^2 y$$

Para vigas con diferentes condiciones de frontera, se discretiza usando diferencias finitas de orden superior.

5.8.3. Control de Procesos Químicos

Problema: Optimizar la concentración en un reactor continuo.

Ecuación de balance:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{Q}{V}(C_0 - C) - kC^2$$

Donde:

- C : concentración (mol/L)
- Q : caudal (L/min)
- V : volumen reactor (L)
- k : constante de reacción (L/(mol·min))

Se resuelve usando Runge-Kutta para diferentes valores de Q y encontrar el óptimo.

5.8.4. Optimización de Intercambiadores de Calor

Problema: Encontrar el área óptima de intercambio para minimizar costos.

Función objetivo:

Minimizar: $C_{total} = C_{capital} + C_{operación}$

Sujeto a: Restricciones de transferencia de calor, caída de presión, etc.

Se resuelve usando métodos de optimización numérica combinados con simulación térmica.

5.9. CASOS DE ESTUDIO INDUSTRIAL

5.9.1. Caso 1: Diseño de un Sistema de Refrigeración

Problema: Una planta procesadora necesita diseñar un sistema de refrigeración para mantener 500 m³ de producto a -18°C.

Datos técnicos:

- Temperatura ambiente: 35°C
- Carga térmica: 150 kW
- Coeficiente global de transferencia: $U = 25 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$
- Costo energía: 0.15 €/kWh
- Factor de seguridad: 1.2

Análisis numérico:

Cálculo del área requerida:

- $Q = UA(T_{amb} - T_{prod})$
- $150,000 = 25 \times A \times (35 - (-18))$
- $A = \frac{150,000}{25 \times 53} = 113.2 \text{ m}^2$
- Con factor de seguridad: $A_{diseño} = 113.2 \times 1.2 = 136 \text{ m}^2$

Optimización económica:

Se resuelve numéricamente:

- Minimizar: $C = C_{capital} + C_{operación} \times t$
- Donde $C_{capital} = 500A + 50,000 \text{ (€)}$
- $C_{operación} = 0.15 \times 8760 \times P_{consumida} \text{ (€/año)}$

Resultado: Área óptima = 142 m², costo anual mínimo = €95,000

5.9.2. Caso 2: Análisis de Fatiga en Turbina Eólica

Problema: Evaluar la vida útil de una pala de turbina eólica bajo cargas cíclicas.

Datos del proyecto:

- Longitud pala: 40 m
- Material: fibra de carbono ($E = 150 \text{ GPa}$)
- Velocidad viento: 3-25 m/s (distribución Weibull)

- Frecuencia de resonancia: 0.8 Hz
- Factor de seguridad: 2.5

Análisis por elementos finitos discretizado:

Ecuación de movimiento:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\}$$

Discretización:

- 200 elementos finitos
- 3 grados de libertad por nodo
- Integración temporal: Newmark- β

Cálculo de vida a fatiga:

$$N_f = \frac{A}{(\sigma_{max} - \sigma_{min})^m}$$

Donde $A = 2 \times 10^{12}$ y $m = 8$ para fibra de carbono.

Resultado: Vida útil estimada = 23.5 años (especificación: 20 años) ✓

5.9.3. Caso 3: Optimización de Proceso de Destilación

Problema: Optimizar una columna de destilación para separar etanol-agua.

Parámetros del proceso:

- Alimentación: 1000 kg/h, 40 % etanol
- Producto destilado: 95 % etanol
- Producto fondos: 5 % etanol
- Número de platos: variable de diseño

Modelo matemático (método McCabe-Thiele numérico):

Balance de materia en plato n:

$$L_{n-1}x_{n-1} + V_{n+1}y_{n+1} = L_nx_n + V_ny_n$$

(platos numerados desde la cabeza de la columna)

Equilibrio vapor-líquido:

- $y_n = \frac{\alpha x_n}{1 + (\alpha - 1)x_n}$ donde $\alpha = 2.5$ (promedio)

Algoritmo de resolución:

1. Inicializar perfiles de composición
2. Resolver balances plato a plato (método Newton-Raphson)
3. Verificar convergencia global
4. Optimizar número de platos vs. costo energético

Resultado optimizado:

- Número de platos: 18 (teóricos)
- Reflujo: $R = 2.1$ (mínimo ≈ 1.44 , alimentación como líquido saturado)
- Consumo energético: 2.8 GJ/h
- Costo operación: €180/h

Comparación con diseño inicial:

- Ahorro energético: 15 %
- Reducción costos: $\approx$ €280,000/año

5.10. CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS

El análisis numérico es una herramienta indispensable en la ingeniería moderna. Su importancia radica en:

1. **Flexibilidad:** Permite resolver problemas sin soluciones analíticas
2. **Precisión controlada:** Proporciona estimaciones de error confiables
3. **Eficiencia computacional:** Algoritmos optimizados para implementación
4. **Aplicabilidad universal:** Desde microsistemas hasta megaestructuras

Principios fundamentales aprendidos:

- El error es inherente pero controlable
- La estabilidad numérica es crucial en algoritmos iterativos
- El balance precisión-costo computacional guía la selección de métodos
- La validación experimental es esencial

Próximos pasos: En cursos posteriores, estos conceptos se extenderán hacia:

- Métodos de elementos finitos avanzados

- Dinámica computacional de fluidos (CFD)
- Optimización numérica multiobjetivo
- Análisis estadístico de incertidumbre

“La naturaleza es el libro de la matemática, pero los métodos numéricos son nuestros lentes para leerlo con precisión”

En la industria 4.0, el análisis numérico es la base de la simulación, optimización y toma de decisiones basada en datos.

6. ARITMÉTICA MODULAR

6.1. LA ARITMÉTICA MODULAR EN SISTEMAS DIGITALES

La aritmética modular es fundamental en el mundo digital moderno. Desde sistemas de codificación hasta criptografía, esta rama de las matemáticas discretas permite trabajar con sistemas finitos de manera eficiente y segura.

6.1.1. ¿Por qué es esencial en la industria tecnológica?

Ejemplo de aplicación: En sistemas de comunicación digital, los datos se transmiten en bloques que deben verificarse contra errores. Si un mensaje tiene longitud n y se envía módulo p , entonces:

La suma de verificación se calcula como: $\sum_{i=1}^n d_i \pmod{p}$

Esta verificación modular permite detectar errores de transmisión de manera eficiente en telecomunicaciones, redes de computadoras y sistemas de almacenamiento.

6.2. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE CONGRUENCIAS

6.2.1. Definición de Congruencia

Dos enteros a y b son **congruentes módulo n** si tienen el mismo residuo al dividirlos por n .

Notación: $a \equiv b \pmod{n}$

Definición formal: $a \equiv b \pmod{n}$ si y solo si n divide a $(a - b)$

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n | (a - b)$$

6.2.2. Ejemplos Básicos

Ejemplo 1: Verificar si $17 \equiv 5 \pmod{12}$

- $17 - 5 = 12$
- Como $12 | 12$, entonces $17 \equiv 5 \pmod{12}$ ✓

Ejemplo 2: Verificar si $25 \equiv 1 \pmod{8}$

- $25 - 1 = 24$

- Como $8|24$ (ya que $24 = 8 \times 3$), entonces $25 \equiv 1 \pmod{8}$ ✓

6.2.3. Propiedades de las Congruencias

6.2.3.1. Reflexividad

$a \equiv a \pmod{n}$ para todo entero a

6.2.3.2. Simetría

Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $b \equiv a \pmod{n}$

6.2.3.3. Transitividad

Si $a \equiv b \pmod{n}$ y $b \equiv c \pmod{n}$, entonces $a \equiv c \pmod{n}$

6.2.4. Clases de Equivalencia

Para un módulo n , existen exactamente n clases de equivalencia:

$$\{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$$

Ejemplo: Para módulo 5, las clases son $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

- Clase $[0]$: $\{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$
- Clase $[1]$: $\{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$
- Clase $[2]$: $\{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$

6.3. OPERACIONES EN ARITMÉTICA MODULAR

6.3.1. Suma Modular

Definición: $(a + b) \pmod{n} = ((a \pmod{n}) + (b \pmod{n})) \pmod{n}$

Ejemplo básico: Calcular $(17 + 23) \pmod{12}$

- Método 1: $(17 + 23) \pmod{12} = 40 \pmod{12} = 4$
- Método 2: $(17 \pmod{12}) + (23 \pmod{12}) = 5 + 11 = 16 \equiv 4 \pmod{12}$

6.3.2. Multiplicación Modular

Definición: $(a \times b) \pmod{n} = ((a \pmod{n}) \times (b \pmod{n})) \pmod{n}$

Ejemplo básico: Calcular $(17 \times 23) \pmod{12}$

- Método 1: $(17 \times 23) \pmod{12} = 391 \pmod{12} = 7$
- Método 2: $(17 \pmod{12}) \times (23 \pmod{12}) = 5 \times 11 = 55 \equiv 7 \pmod{12}$

6.3.3. Exponenciación Modular Rápida

Para calcular $a^b \pmod{n}$ de manera eficiente:

Algoritmo de exponenciación rápida:

1. Expresar b en binario
2. Usar la propiedad: $a^{2k} = (a^k)^2$

Ejemplo: Calcular $3^{13} \pmod{7}$

- $13 = 8 + 4 + 1 = 2^3 + 2^2 + 2^0$
- $3^1 \equiv 3 \pmod{7}$
- $3^2 \equiv 9 \equiv 2 \pmod{7}$
- $3^4 \equiv (3^2)^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{7}$
- $3^8 \equiv (3^4)^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 2 \pmod{7}$
- $3^{13} = 3^8 \times 3^4 \times 3^1 \equiv 2 \times 4 \times 3 \equiv 24 \equiv 3 \pmod{7}$

6.4. EL ALGORITMO EXTENDIDO DE EUCLIDES

6.4.1. Algoritmo de Euclides Clásico

Para encontrar $\gcd(a, b)$:

Procedimiento:

1. $r_0 = a, r_1 = b$
2. Mientras $r_i \neq 0$:
 - $q_i = \lfloor r_{i-1}/r_i \rfloor$
 - $r_{i+1} = r_{i-1} - q_i \times r_i$
3. $\gcd(a, b) = r_k$ (último residuo no nulo)

Ejemplo: Calcular $\gcd(48, 18)$

- $48 = 2 \times 18 + 12$
- $18 = 1 \times 12 + 6$
- $12 = 2 \times 6 + 0$
- Por tanto, $\gcd(48, 18) = 6$

6.4.2. Algoritmo Extendido de Euclides

Encuentra enteros s y t tales que $as + bt = \gcd(a, b)$

Ejemplo: Encontrar s, t tales que $48s + 18t = \gcd(48, 18) = 6$

- Trabajando hacia atrás:
- $6 = 18 - 1 \times 12$
- $6 = 18 - 1 \times (48 - 2 \times 18)$
- $6 = 18 - 48 + 2 \times 18$
- $6 = 3 \times 18 - 1 \times 48$
- Por tanto: $s = -1, t = 3$

6.4.3. Verificación

- $48 \times (-1) + 18 \times 3 = -48 + 54 = 6 \checkmark$

6.5. ECUACIONES DIOFÁNTICAS LINEALES

6.5.1. Definición

Una **ecuación diofántica lineal** en dos variables tiene la forma:

$$ax + by = c$$

donde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y buscamos soluciones enteras (x, y) .

6.5.2. Condición de Existencia

Teorema: La ecuación $ax + by = c$ tiene solución entera si y solo si $\gcd(a, b)$ divide a c .

6.5.3. Método de Solución

Procedimiento:

1. Calcular $d = \gcd(a, b)$
2. Verificar si $d|c$
3. Si existe solución, usar el algoritmo extendido para encontrar s, t tales que $as + bt = d$
4. Multiplicar por c/d : $x_0 = s \cdot (c/d), y_0 = t \cdot (c/d)$
5. Solución general: $x = x_0 + (b/d)k, y = y_0 - (a/d)k$ con $k \in \mathbb{Z}$

6.5.4. Ejemplo Completo

Resolver: $40x + 15y = 30$

Paso 1: $\gcd(40, 15) = 5$

Paso 2: Como $5|30$, la ecuación tiene solución

Paso 3: Usar algoritmo extendido:

- $40 = 2 \times 15 + 10$
- $15 = 1 \times 10 + 5$
- $10 = 2 \times 5 + 0$
- Trabajando hacia atrás:
- $5 = 15 - 1 \times 10 = 15 - 1 \times (40 - 2 \times 15) = 3 \times 15 - 1 \times 40$

Paso 4: Como $30 = 6 \times 5$:

- $x_0 = (-1) \times 6 = -6$
- $y_0 = 3 \times 6 = 18$

Paso 5: Solución general:

- $x = -6 + 3k$
- $y = 18 - 8k$

6.6. ECUACIONES EN CONGRUENCIAS LINEALES

6.6.1. Forma General

Una **ecuación de congruencia lineal** tiene la forma:

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

6.6.2. Condición de Solución

Teorema: La ecuación $ax \equiv b \pmod{m}$ tiene solución si y solo si $\gcd(a, m)$ divide a b .

6.6.3. Número de Soluciones

Si $d = \gcd(a, m)$ y $d|b$, entonces:

- Existen exactamente d soluciones distintas módulo m
- Si $d = 1$, existe una única solución módulo m

6.6.4. Método de Solución

Procedimiento:

1. Verificar si $\gcd(a, m) | b$
2. Simplificar: $\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$
3. Encontrar el inverso modular de $\frac{a}{d}$ módulo $\frac{m}{d}$
4. Multiplicar ambos lados por el inverso

6.6.5. Ejemplo Práctico

Resolver: $54x \equiv 6 \pmod{34}$

Paso 1 $\gcd(54, 34) = \gcd(20, 34) = 2$

- Como $2 | 6$, existe solución

Paso 2 Simplificar: $27x \equiv 3 \pmod{17}$

- Equivalentemente: $10x \equiv 3 \pmod{17}$ (ya que $27 \equiv 10 \pmod{17}$)

Paso 3 Encontrar $10^{-1} \pmod{17}$

- Usando algoritmo extendido: $10 \times 12 \equiv 1 \pmod{17}$

Paso 4 $x \equiv 3 \times 12 \equiv 36 \equiv 2 \pmod{17}$

Solución $x \equiv 2 \pmod{17}$

Comentario: de acuerdo con el teorema anterior ($d = 2$ soluciones módulo $m = 34$), la misma solución escrita módulo 34 son dos clases: $x \equiv 2$ y $x \equiv 19 \pmod{34}$. Compruébese: $54 \cdot 19 = 1026 = 30 \cdot 34 + 6$. Un error típico es dividir a y b entre d y olvidar dividir también el módulo.

6.7. EL ANILLO DE LOS ENTEROS MÓDULO n

6.7.1. Definición del Conjunto $\mathbb{Z}_n$

Para un entero positivo n :

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

6.7.2. Operaciones en $\mathbb{Z}_n$

6.7.2.1. Suma Modular

- $a \oplus b = (a + b) \pmod{n}$

6.7.2.2. Multiplicación Modular

- $a \otimes b = (a \times b) \text{ mód } n$

6.7.3. Propiedades Algebraicas**Suma:**

- Conmutativa: $a \oplus b = b \oplus a$
- Asociativa: $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
- Elemento neutro: 0
- Elemento inverso: $-a \equiv (n - a) \text{ (mód } n)$

Multiplicación:

- Conmutativa: $a \otimes b = b \otimes a$
- Asociativa: $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$
- Elemento neutro: 1
- Distributiva: $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

6.7.4. Elementos Invertibles

Un elemento $a \in \mathbb{Z}_n$ tiene inverso multiplicativo si y solo si $\gcd(a, n) = 1$.

Ejemplo: En $\mathbb{Z}_{12}$, los elementos invertibles son $\{1, 5, 7, 11\}$

- Verificación para $a = 5$:
- $5 \times 5 = 25 \equiv 1 \text{ (mód } 12)$
- Por tanto, $5^{-1} = 5$ en $\mathbb{Z}_{12}$

6.7.5. Función de Euler

La **función de Euler** $\phi(n)$ cuenta los enteros positivos menores que n que son coprimos con n .

Fórmula para números primos:

- Si p es primo: $\phi(p) = p - 1$

Fórmula general:

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Ejemplos:

- $\phi(12) = 12 \times (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) = 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 4$
- $\phi(7) = 6$ (ya que 7 es primo)

6.8. EJERCICIOS BÁSICOS FUNDAMENTALES

6.8.1. Ejercicio Básico 1: Verificación de Congruencias

Verificar si $137 \equiv 5 \pmod{12}$

Solución:

- $137 - 5 = 132$
- $132 = 12 \times 11$
- Como $12|132$, entonces $137 \equiv 5 \pmod{12}$ ✓

6.8.2. Ejercicio Básico 2: Operaciones Modulares

Calcular $(47 + 83) \times 29 \pmod{15}$

Solución:

- $47 \equiv 2 \pmod{15}$
- $83 \equiv 8 \pmod{15}$
- $29 \equiv 14 \pmod{15}$
- $(47 + 83) \times 29 \equiv (2 + 8) \times 14 \equiv 10 \times 14 \equiv 140 \equiv 5 \pmod{15}$

6.8.3. Ejercicio Básico 3: Ecuación Diofántica

Resolver $25x + 15y = 10$

Solución:

- $\gcd(25, 15) = 5$
- Como $5|10$, existe solución
- Algoritmo extendido: $25(-1) + 15(2) = 5$
- Multiplicando por 2: $25(-2) + 15(4) = 10$
- Solución particular: $x_0 = -2, y_0 = 4$
- Solución general: $x = -2 + 3k, y = 4 - 5k$

6.8.4. Ejercicio Básico 4: Congruencia Lineal

Resolver $7x \equiv 3 \pmod{11}$

Solución:

- Como $\gcd(7, 11) = 1$, existe solución única
- Buscamos $7^{-1} \pmod{11}$:
- $7 \times 8 = 56 \equiv 1 \pmod{11}$
- Por tanto: $x \equiv 3 \times 8 \equiv 24 \equiv 2 \pmod{11}$

6.8.5. Ejercicio Básico 5: Función de Euler

Calcular $\phi(20)$ **y listar los elementos invertibles en** $\mathbb{Z}_{20}$

Solución:

- $20 = 2^2 \times 5$
- $\phi(20) = 20 \times (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{5}) = 20 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = 8$
- Elementos invertibles: $\{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

6.9. APLICACIONES INDUSTRIALES**6.9.1. Códigos de Verificación en Sistemas Digitales**

Código de verificación ISBN:

Los códigos ISBN utilizan aritmética módulo 10 y 11 para verificar errores.

Caso práctico: Verificar si 978-84-376-0494-7 es un ISBN-13 válido.

Solución:

- ISBN-13 usa módulo 10 con pesos alternados 1 y 3:
- $S = 9 \times 1 + 7 \times 3 + 8 \times 1 + 8 \times 3 + 4 \times 1 + 3 \times 3 + 7 \times 1 + 6 \times 3 + 0 \times 1 + 4 \times 3 + 9 \times 1 + 4 \times 3$
- $S = 9 + 21 + 8 + 24 + 4 + 9 + 7 + 18 + 0 + 12 + 9 + 12 = 133$
- Dígito verificador: $(10 - (133 \bmod 10)) \bmod 10 = 7 \checkmark$

6.9.2. Criptografía RSA Básica

Fundamento matemático:

El algoritmo RSA se basa en la dificultad de factorizar números grandes.

Caso práctico: Implementar RSA con números pequeños para demostración.

Parámetros: $p = 7, q = 11$, por tanto $n = 77$ y $\phi(n) = 60$

Solución:

Paso 1 Elegir e coprimo con $\phi(n) = 60$

- Elegimos $e = 13$ (ya que $\gcd(13, 60) = 1$)

Paso 2 Calcular d tal que $ed \equiv 1 \pmod{60}$

- $13d \equiv 1 \pmod{60}$
- Usando algoritmo extendido: $d = 37$

Paso 3 Verificar: $13 \times 37 = 481 \equiv 1 \pmod{60}$ ✓

Claves Pública ($n = 77, e = 13$), Privada ($n = 77, d = 37$)

Cifrado $c = m^{13} \pmod{77}$

Descifrado $m = c^{37} \pmod{77}$

Ejemplo: para el mensaje $m = 2$, $c = 2^{13} \pmod{77} = 30$, y al descifrar $30^{37} \pmod{77} = 2$ se recupera el mensaje. Ambas potencias se calculan con la exponenciación rápida vista antes. La seguridad depende de que, conociendo solo (n, e) , sea muy difícil obtener $\phi(n)$ sin factorizar n .

6.9.3. Sistemas de Control de Acceso por Tarjetas

Hash modular para identificación:

Las tarjetas de acceso utilizan funciones hash modulares para generar códigos únicos.

Caso práctico: Sistema de badges con 10,000 empleados usando aritmética módulo primo.

Solución:

Función hash $h(id) = (a \times id + b) \pmod{p}$

- Para $p = 10007$ (primo cercano a 10,000):
- $a = 3571, b = 2843$

Ejemplo Empleado ID 1234

- $h(1234) = (3571 \times 1234 + 2843) \pmod{10007} = 4409457 \pmod{10007} = 6377$
- El código de acceso sería 6377

6.9.4. Detección de Errores en Transmisión de Datos

Checksum modular:

Los protocolos de comunicación usan sumas de verificación modulares.

Caso práctico: Verificación de integridad en paquetes de red de 1024 bytes.

Solución:

Protocolo Usar módulo $2^{16} - 1 = 65535$

Datos Secuencia de bytes $d_1, d_2, \dots, d_{1024}$

Checksum $C = \left(\sum_{i=1}^{1024} d_i \right) \text{ mód } 65535$

Verificación El receptor calcula la suma y compara con C

Ejemplo numérico

- Si los primeros 4 bytes son: 192, 168, 1, 100
- $C_{\text{parcial}} = (192 + 168 + 1 + 100) \text{ mód } 65535 = 461$

6.9.5. Algoritmos de Planificación Circular (Round Robin)

Distribución de tareas en sistemas multiproceso:

Caso práctico: Asignar 15 procesos a 4 núcleos de CPU de manera equitativa.

Solución:

Algoritmo: Proceso i va al núcleo $(i \text{ mód } 4)$

Distribución:

- Núcleo 0: Procesos 0, 4, 8, 12
- Núcleo 1: Procesos 1, 5, 9, 13
- Núcleo 2: Procesos 2, 6, 10, 14
- Núcleo 3: Procesos 3, 7, 11

Balanceo: 4, 4, 4, 3 procesos respectivamente

6.9.6. Sistemas de Calendario y Fechas

Cálculo del día de la semana:

Algoritmo de Zeller modificado:

Caso práctico: Determinar qué día de la semana fue el 15 de abril de 2025.

Solución:

Fórmula: $h = \left(q + \left\lfloor \frac{13(m+1)}{5} \right\rfloor + K + \left\lfloor \frac{K}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{J}{4} \right\rfloor - 2J \right) \text{ mód } 7$

Donde:

- $q = 15$ (día)
- $m = 4$ (abril)
- $K = 25$ (año del siglo)
- $J = 20$ (siglo)

- $h = (15 + \lfloor \frac{13 \times 5}{5} \rfloor + 25 + \lfloor \frac{25}{4} \rfloor + \lfloor \frac{20}{4} \rfloor - 2 \times 20) \bmod 7$
- $h = (15 + 13 + 25 + 6 + 5 - 40) \bmod 7 = 24 \bmod 7 = 3$

Resultado: Martes (0=Sábado, 1=Domingo, ..., 6=Viernes)

6.9.7. Generación de Números Pseudoaleatorios

Generador congruencial lineal:

Caso práctico: Simulación Monte Carlo para pruebas de calidad en manufactura.

Solución:

Fórmula: $X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m$

Parámetros estándar: $a = 1664525$, $c = 1013904223$, $m = 2^{32}$

Semilla: $X_0 = 12345$

Secuencia:

- $X_1 = (1664525 \times 12345 + 1013904223) \bmod 2^{32} = 87628868$
- $X_2 = (1664525 \times 87628868 + 1013904223) \bmod 2^{32} = 71072467$

Normalización: Dividir por 2^{32} para obtener números en $[0,1)$

6.10. CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS

La aritmética modular constituye la base matemática de numerosos sistemas digitales modernos. Su aplicación abarca desde la seguridad informática hasta la optimización de algoritmos, proporcionando:

1. **Eficiencia computacional:** Reducción del espacio de números en cálculos
2. **Seguridad criptográfica:** Fundamento de algoritmos de cifrado modernos
3. **Detección de errores:** Verificación de integridad en comunicaciones
4. **Distribución uniforme:** Algoritmos de balanceo de carga y planificación

Próximos pasos: En cursos posteriores, estos conceptos se extenderán hacia:

- Criptografía avanzada y curvas elípticas
- Teoría de números computacional
- Algoritmos de factorización
- Sistemas de blockchain y criptomonedas

“En el mundo digital, trabajar módulo n no es una limitación, sino una ventaja que nos permite crear sistemas eficientes y seguros.”

La aritmética modular es esencial para la comprensión de los fundamentos matemáticos que sustentan la tecnología moderna.

7. TEORÍA DE GRAFOS

7.1. LAS MATEMÁTICAS DE LAS CONEXIONES

En el mundo industrial moderno, la teoría de grafos no es una abstracción matemática, sino una herramienta fundamental para modelar y optimizar sistemas complejos. Desde el diseño de redes de telecomunicaciones hasta la planificación de rutas de distribución, pasando por el análisis de estructuras organizacionales y el control de procesos industriales, los grafos proporcionan un lenguaje matemático elegante para representar relaciones y conexiones.

7.1.1. ¿Por qué necesitamos teoría de grafos en la industria?

Ejemplo de aplicación: En una planta de manufactura moderna, los productos deben seguir rutas específicas a través de diferentes estaciones de trabajo. La eficiencia del proceso depende de minimizar los tiempos de tránsito, evitar cuellos de botella y garantizar que cada producto visite todas las estaciones necesarias exactamente una vez. Los grafos nos permiten modelar estas rutas como caminos en una estructura matemática, aplicando algoritmos para encontrar soluciones óptimas.

7.2. CONCEPTOS BÁSICOS DE GRAFOS

7.2.1. Definición de Grafo

Un grafo G es una estructura matemática que consiste en un par (V, E) , donde:

- V es un conjunto finito no vacío de **vértices** (también llamados nodos)
- E es un conjunto de **aristas** (también llamadas arcos o conexiones)

Definición formal:

- $G = (V, E)$ donde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y cada arista $e \in E$ conecta dos vértices
- Para una arista e que conecta vértices u y v : $e = \{u, v\}$

Ejemplos numéricos básicos:

Ejemplo 1: Red de comunicación simple

- $V = \{A, B, C, D\}$ (4 estaciones)
- $E = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{A, D\}\}$ (4 conexiones)

Ejemplo 2: Sistema de control de procesos

- $V = \{S_1, S_2, S_3\}$ (3 sensores)
- $E = \{\{S_1, S_2\}, \{S_2, S_3\}\}$ (2 conexiones de datos)

Ejemplo 1: Red de comunicación simple

Ejemplo 2: Sistema de control de procesos

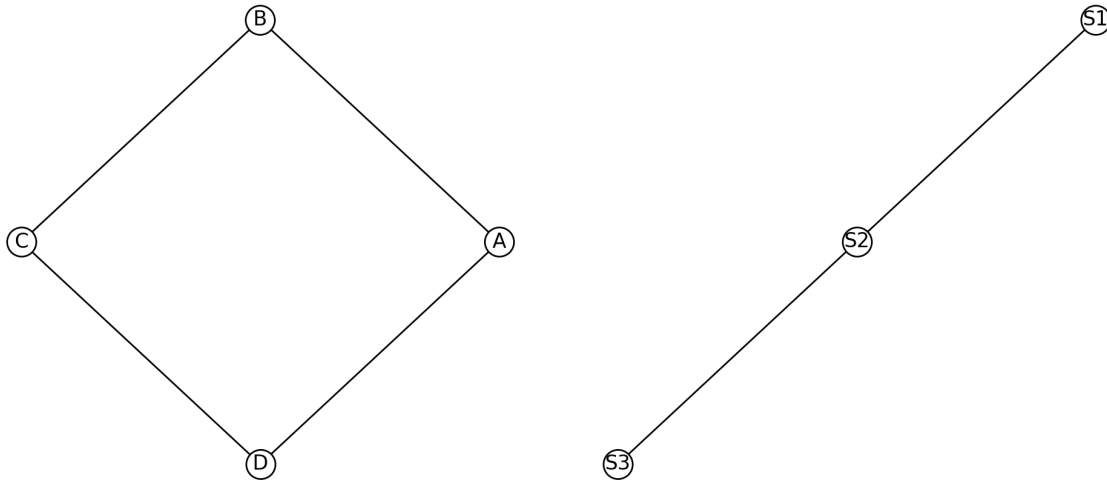


Figura 7.1: Ejemplos de grafos. A la izquierda, red de comunicación simple con cuatro estaciones y sus conexiones. A la derecha, sistema de control de procesos con tres sensores y dos conexiones.

7.2.2. Tipos de Grafos

7.2.2.1. Grafos Dirigidos (Dígrafos)

En un **grafo dirigido**, las aristas tienen dirección:

- $G = (V, E)$ donde cada arista $e \in E$ es un par ordenado (u, v)

Aplicación industrial: Líneas de ensamble donde el producto fluye en una sola dirección.

Ejemplos:

- Proceso de manufactura: $V = \{Inicio(I), Corte(C), Soldadura(S), Pintura(P), Final(F)\}$
- Aristas dirigidas: $E = \{(Inicio, Corte), (Corte, Soldadura), (Soldadura, Pintura), (Pintura, Final)\}$

7.2.2.2. Grafos Ponderados

Las aristas tienen **pesos** que representan costos, distancias, tiempos, etc.

- Para cada arista $e = \{u, v\}$ existe una función peso $w(e) = w(u, v) \in \mathbb{R}^+$

Ejemplos numéricos:

- Red de distribución: distancias entre centros
 - Arista $\{Madrid, Barcelona\}$ con peso $w = 621$ km

Ejemplo de Grafo Dirigido: Proceso de Manufactura



Figura 7.2: Grafo dirigido de un proceso de manufactura. Los nodos se identifican con iniciales en los círculos (I, C, S, P, F)

- Arista $\{Madrid, Sevilla\}$ con peso $w = 532$ km

Ejemplo de Grafo Ponderado con iniciales

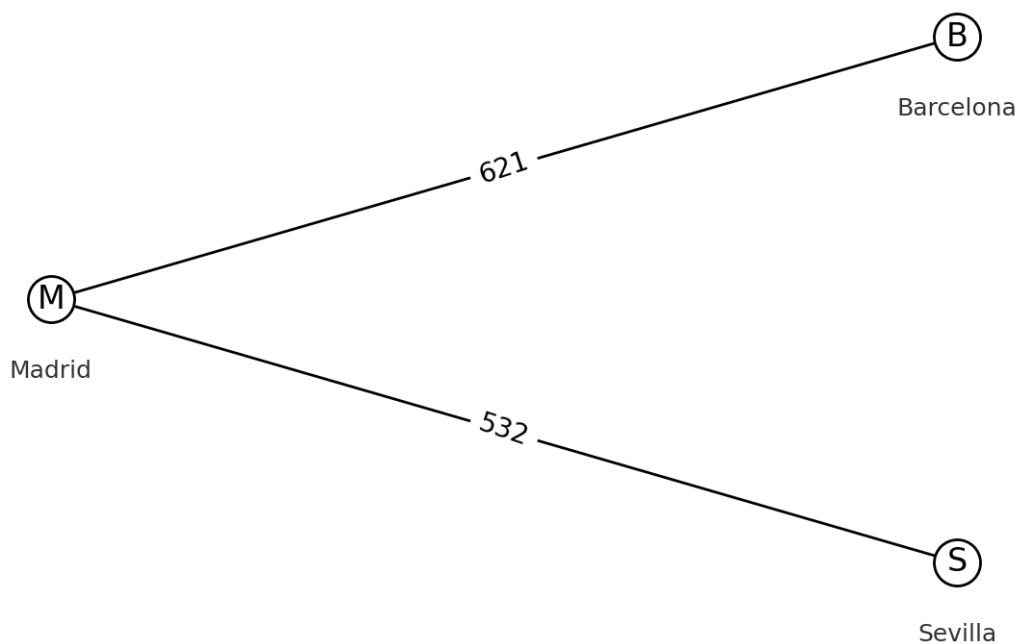


Figura 7.3: Grafo ponderado con iniciales en los nodos (M, B, S). Los pesos representan distancias en kilómetros.

7.2.3. Conceptos Fundamentales

7.2.3.1. Grado de un Vértice

El **grado** $\deg(v)$ de un vértice v es el número de aristas incidentes en él.

Para un vértice $v \in V$: $\deg(v) = |\{e \in E : v \in e\}|$

Ejemplos numéricos:

En una red de 5 nodos donde el nodo central se conecta a todos los demás:

- Nodo central: $\deg(\text{centro}) = 4$
- Nodos periféricos: $\deg(\text{periferia}_i) = 1$

Propiedad fundamental (Lema del Apretón de Manos):

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Ejemplo verificación: Red con 4 vértices y 3 aristas:

$$\text{Grados: } 2 + 2 + 1 + 1 = 6 = 2 \times 3 \checkmark$$

7.2.3.2. Grafos Completos

Un grafo K_n es **completo** si cada par de vértices está conectado.

$$\text{Número de aristas en } K_n: |E| = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ejemplos numéricos:

- K_3 : 3 vértices, 3 aristas
- K_4 : 4 vértices, 6 aristas
- K_5 : 5 vértices, 10 aristas

Aplicación industrial: Red de comunicación completamente redundante donde cada nodo puede comunicarse directamente con cualquier otro.

7.3. REPRESENTACIÓN DE GRAFOS

7.3.1. Matriz de Adyacencia

Para un grafo $G = (V, E)$ con n vértices, la **matriz de adyacencia** A es una matriz $n \times n$ donde:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E \end{cases}$$

Ejemplo numérico:

Red de 4 nodos con conexiones: $A \leftrightarrow B$, $B \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow D$, $A \leftrightarrow D$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- La matriz es simétrica para grafos no dirigidos
- La suma de la fila i es $\deg(v_i)$
- El número total de unos es $2|E|$

7.3.2. Lista de Adyacencia

Para cada vértice v , mantenemos una lista de sus vecinos:

Ejemplo (mismo grafo):

- A: [B, D]
- B: [A, C]
- C: [B, D]
- D: [A, C]

Comparación de eficiencia:

Aspecto	Matriz de Adyacencia	Lista de Adyacencia
Espacio	$O(n^2)$	$O(n + m)$
Verificar si $(u, v) \in E$	$O(1)$	$O(\deg(u))$
Encontrar vecinos de v	$O(n)$	$O(\deg(v))$
Agregar arista	$O(1)$	$O(1)$
Eliminar arista	$O(1)$	$O(\deg(v))$

Donde:

- n = número de vértices
- m = número de aristas
- $\deg(v)$ = grado del vértice v

Criterios de Selección

Matriz de Adyacencia - Óptima para:

- **Grafos densos:** $m \approx n^2$ (muchas conexiones)
- **Consultas frecuentes de adyacencia:** “¿Están u y v conectados?”
- **Algoritmos matriciales:** Multiplicación de matrices, potencias

Lista de Adyacencia - Óptima para:

- **Grafos dispersos:** $m \ll n^2$ (pocas conexiones)
- **Recorridos del grafo:** DFS, BFS, algoritmos de caminos
- **Eficiencia de memoria:** Especialmente cuando $m < \frac{n^2}{4}$

Ejemplo Cuantitativo

Para una red social con $n = 10\,000$ usuarios y $m = 50\,000$ conexiones:

- **Matriz:** $10\,000^2 = 100\,000\,000$ celdas (~400 MB)
- **Lista:** $10\,000 + 50\,000 = 60\,000$ elementos (~240 KB)

Factor de eficiencia: Lista usa $\approx 1\,600$ veces menos memoria.

7.3.3. Grafos Ponderados

Para grafos con pesos, la matriz de adyacencia contiene los pesos:

$$A_{ij} = \begin{cases} w(v_i, v_j) & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E \\ \infty \text{ o } 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E \end{cases}$$

Ejemplo industrial: Red de distribución con costos de transporte

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 150 & \infty & 200 \\ 150 & 0 & 100 & \infty \\ \infty & 100 & 0 & 80 \\ 200 & \infty & 80 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde los valores representan costos en euros por envío.

7.4. CAMINOS Y CONECTIVIDAD

7.4.1. Definiciones Fundamentales

7.4.1.1. Camino

Un **camino** de longitud k es una secuencia de vértices $v_0, v_1, \dots, v_k$ donde cada par consecutivo está conectado por una arista.

Camino: $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ donde $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para $i = 0, 1, \dots, k-1$

7.4.1.2. Camino Simple

Un **camino simple** no repite vértices (excepto posiblemente el primero y último).

7.4.1.3. Ciclo

Un **ciclo** es un camino cerrado simple (primer y último vértice coinciden).

Ejemplos numéricos:

En una red con vértices $\{A, B, C, D\}$ y aristas $\{AB, BC, CD, DA\}$:

- Camino de A a C: $A \rightarrow B \rightarrow C$ (longitud 2)

- Ciclo: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ (longitud 4)

7.4.2. Algoritmos de Búsqueda

7.4.2.1. ¿Qué buscan los algoritmos de búsqueda?

Los algoritmos de búsqueda en grafos tienen múltiples objetivos:

- **Explorar todos los nodos** accesibles desde un punto inicial
- **Encontrar caminos** entre vértices
- **Calcular distancias** mínimas (número de aristas)
- **Detectar componentes conexas** (subgrafos separados)
- **Verificar conectividad** del grafo
- **Encontrar ciclos** o estructuras específicas

7.5. Búsqueda en Anchura (BFS)

¿Qué hace? Explora el grafo **nivel por nivel** desde un vértice fuente, como ondas en un estanque.

¿Para qué sirve?

- Encontrar la **distancia mínima** (menor número de aristas) entre nodos
- Explorar **vecindarios** de un nodo
- Encontrar el **camino más corto** en grafos no ponderados

7.5.1. Algoritmo BFS paso a paso:

1. Inicializar cola Q con vértice fuente s
2. Marcar s como visitado, $distancia[s] = 0$
3. Mientras Q no esté vacía:
 - Extraer vértice u de Q
 - Para cada vecino v de u no visitado:
 - Marcar v como visitado
 - $distancia[v] = distancia[u] + 1$
 - Añadir v a Q

7.5.2. Ejemplo detallado paso a paso:

Red: A—B, A—C, B—D, C—D, D—E

BFS desde A:

Paso	Cola Q	Procesando	Vecinos encontrados	Distancias
0	[A]	-	-	d(A)=0
1	[B,C]	A	B,C no visitados	d(B)=1, d(C)=1
2	[C,D]	B	D no visitado	d(D)=2
3	[D]	C	D ya visitado	-

Paso	Cola Q	Procesando	Vecinos encontrados	Distancias
4	[E]	D	E no visitado	d(E)=3
5	[]	E	Sin vecinos	Termina

Resultado:

- **Nivel 0:** {A}
- **Nivel 1:** {B, C}
- **Nivel 2:** {D}
- **Nivel 3:** {E}
- **Distancias:** d(A)=0, d(B)=d(C)=1, d(D)=2, d(E)=3

7.6. Búsqueda en Profundidad (DFS)

¿Qué hace? Explora tan **profundamente** como sea posible antes de retroceder, como explorar un laberinto.

¿Para qué sirve?

- **Detectar ciclos** en el grafo
- Encontrar **componentes conexas**
- **Ordenamiento topológico**
- Explorar **todos los caminos** posibles

7.6.1. Implementación recursiva:

DFS(v) :

```

marcar v como visitado
para cada vecino u de v:
    si u no está visitado:
        DFS(u)

```

7.6.2. Ejemplo detallado paso a paso:

Mismo grafo: A—B, A—C, B—D, C—D, D—E

DFS desde A:

Paso	Visitando	Decisión	Stack implícito
1	A	Marcar A, ir a B	[A]
2	B	Marcar B, ir a D (A ya visitado)	[A,B]
3	D	Marcar D, ir a C (B ya visitado)	[A,B,D]
4	C	Marcar C, sus vecinos A y D ya visitados	[A,B,D,C]
5	-	Retroceder a D, ir a E	[A,B,D]
6	E	Marcar E, su único vecino D ya visitado	[A,B,D,E]
7	-	Retroceder a D, a B y a A	[A]

Paso	Visitando	Decisión	Stack implícito
8	-	Termina (todos visitados)	[]

Orden de visita: $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E$

7.7. Conectividad

7.7.1. ¿Qué es una Componente Conexa?

Una **componente conexa** es un subconjunto maximal de vértices donde existe un camino entre cualquier par de ellos.

¿Para qué sirve detectarlas?

- **Analizar redes sociales:** Grupos de amigos separados
- **Sistemas de transporte:** Regiones conectadas
- **Circuitos eléctricos:** Componentes aislados

7.7.2. Algoritmo para encontrar componentes:

1. Inicializar contador *componentes* = 0
2. Para cada vértice *v* no visitado:
 - Ejecutar DFS desde *v* (marca toda su componente)
 - Incrementar *componentes*

7.7.3. Ejemplo numérico completo:

Grafo: Vértices {A, B, C, D, E, F} y aristas {A-B, B-C, D-E}

Ejecución del algoritmo:

Paso	Vértice	Estado	Acción	Componentes
1	A	No visitado	DFS(A) marca A,B,C	Comp 1
2	B	Visitado	Saltar	-
3	C	Visitado	Saltar	-
4	D	No visitado	DFS(D) marca D,E	Comp 2
5	E	Visitado	Saltar	-
6	F	No visitado	DFS(F) marca F	Comp 3

Resultado:

- **Componente 1:** {A, B, C}
- **Componente 2:** {D, E}
- **Componente 3:** {F}
- **Total:** 3 componentes conexas

Grafo no dirigido con nodos A-E

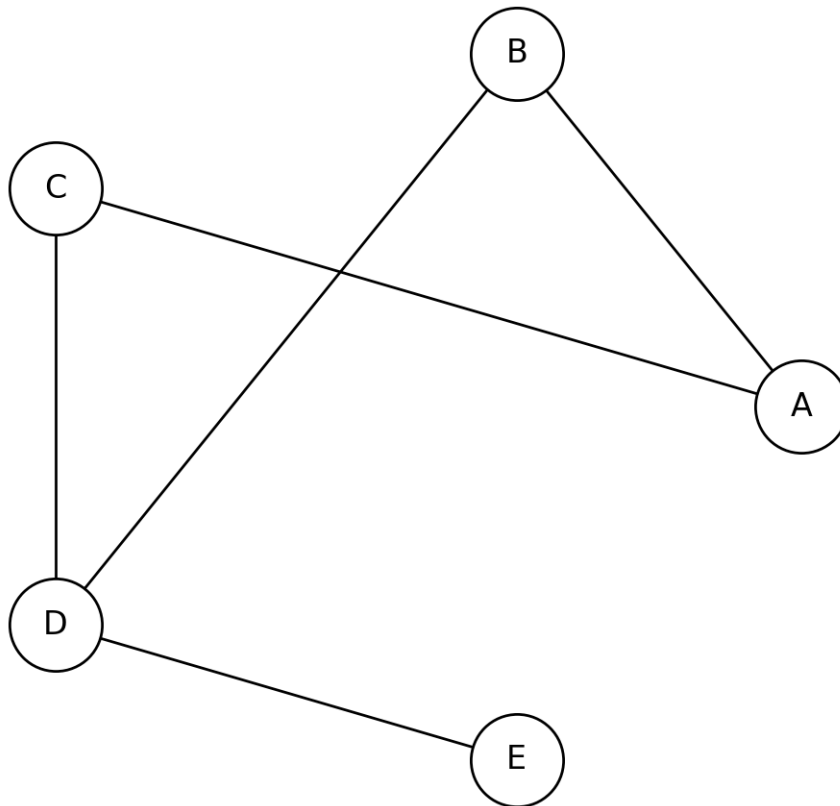


Figura 7.4: A—B, A—C, B—D, C—D, D—E

Grafo con tres componentes conexas



Figura 7.5: Vértices {A, B, C, D, E, F} y aristas {A-B, B-C, D-E}

7.7.4. Propiedades importantes:

- Un grafo **conexo** tiene exactamente **1 componente**
- Un grafo con n vértices aislados tiene n **componentes**
- BFS o DFS desde cualquier vértice explora completamente su componente conexa

7.8. ÁRBOLES Y ALGORITMOS DE BÚSQUEDA**7.8.1. Definición de Árboles**

Un **árbol** es un grafo conexo y acíclico.

Propiedades fundamentales: Para un árbol T con n vértices:

- Tiene exactamente $n - 1$ aristas
- Existe un único camino simple entre cualquier par de vértices
- Eliminar cualquier arista lo desconecta
- Añadir cualquier arista crea exactamente un ciclo

Ejemplo:

Árbol con 5 vértices: necesariamente tiene 4 aristas.

7.8.2. Árboles de Expansión Mínima

Dado un grafo ponderado conexo G , un **Árbol de Expansión Mínima (MST)** es un árbol que:

- Conecta todos los vértices
- Tiene peso mínimo total

7.8.2.1. Algoritmo de Kruskal

Pasos del algoritmo:

1. Ordenar todas las aristas por peso creciente
2. Inicializar bosque vacío
3. Para cada arista (u, v) en orden:
 - Si u y v están en diferentes componentes:
 - Añadir arista al MST
 - Unir componentes de u y v

Ejemplo aplicación:

Grafo con aristas y pesos:

AB: 4, AC: 2, AD: 3, BC: 1, BD: 5, CD: 6

Ejemplo de Árbol con 5 vértices y 4 aristas

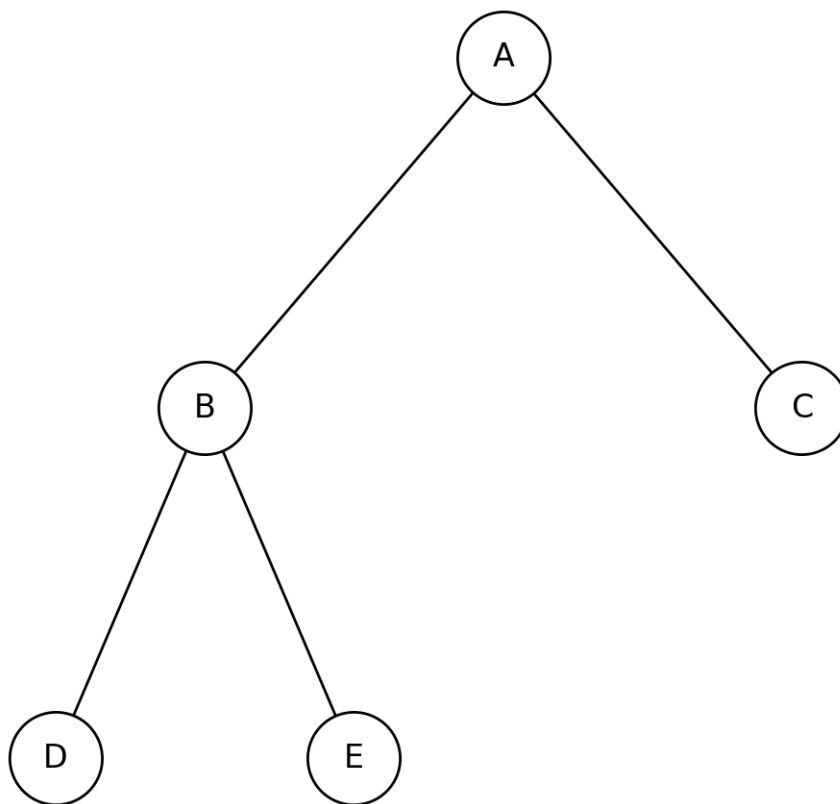


Figura 7.6: Ejemplo de árbol con 5 vértices y 4 aristas. Se observa su estructura jerárquica, conexa y acíclica.

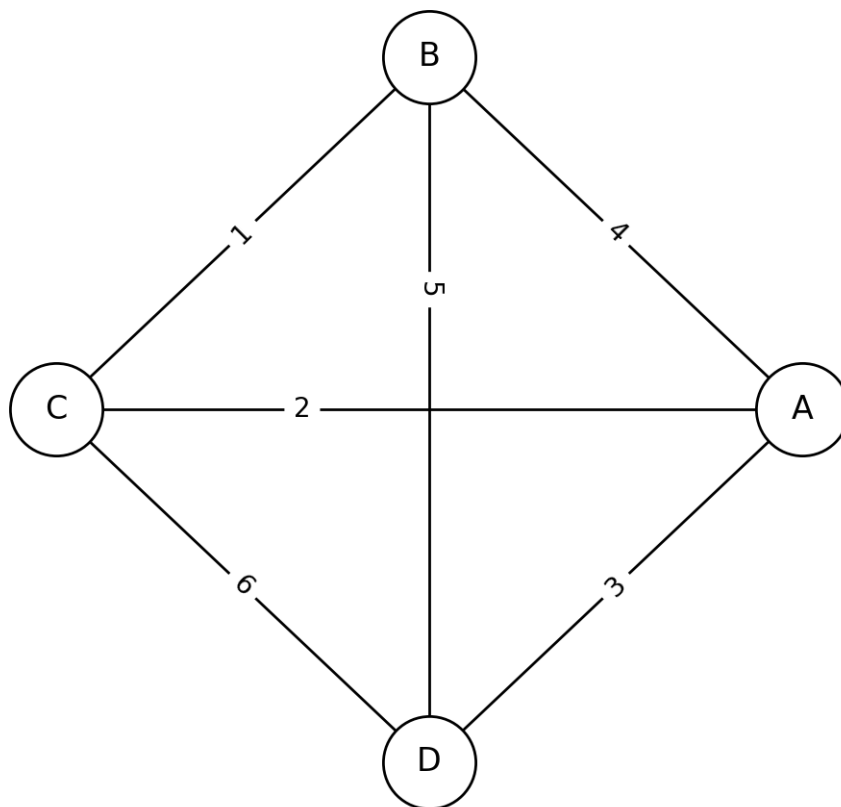


Figura 7.7: Grafo ponderado con cuatro vértices (A, B, C, D).

Ordenación: BC(1), AC(2), AD(3), AB(4), BD(5), CD(6)

MST construcción:

1. Añadir BC (peso 1) $\rightarrow$ componentes: $\{B,C\}$, $\{A\}$, $\{D\}$
2. Añadir AC (peso 2) $\rightarrow$ componentes: $\{A,B,C\}$, $\{D\}$
3. Añadir AD (peso 3) $\rightarrow$ componentes: $\{A,B,C,D\}$

MST final: BC + AC + AD con peso total = 6

7.8.2.2. Algoritmo de Prim

Pasos del algoritmo:

1. Comenzar con vértice arbitrario v_0
2. Inicializar $S = \{v_0\}$ (vértices en el árbol)
3. Repetir hasta que $|S| = |V|$:
 - Encontrar arista de peso mínimo entre S y $V \setminus S$
 - Añadir arista y vértice al árbol
 - Actualizar S

Ejemplo aplicación (mismo grafo):

Comenzar con A:

1. $S = \{A\}$, aristas disponibles: AB(4), AC(2), AD(3)
 - Elegir AC (peso 2)
2. $S = \{A, C\}$, nuevas aristas: BC(1), CD(6)
 - Elegir BC (peso 1)
3. $S = \{A, C, B\}$, nuevas aristas: BD(5), CD(6), AD(3)
 - Elegir AD (peso 3)

MST final: AC + BC + AD con peso total = 6

7.8.3. Caminos Mínimos

7.8.3.1. Algoritmo de Dijkstra

Encuentra el camino de menor peso desde un vértice fuente a todos los demás.

Pasos del algoritmo: Con la notación $w(u, v)$ es el peso de la arista entre u y v :

1. Inicializar distancias: $d[\text{fuente}] = 0$, $d[v] = \infty$ para $v \neq \text{fuente}$
2. Inicializar conjunto $S = \emptyset$ (vértices procesados)
3. Repetir hasta procesar todos los vértices:
 - Seleccionar vértice $u \notin S$ con $d[u]$ mínima
 - Añadir u a S
 - Para cada vecino v de u :
 - Si $d[u] + w(u, v) < d[v]$:
 - $d[v] = d[u] + w(u, v)$
 - $\text{predecesor}[v] = u$

Ejemplo numérico:

Grafo con pesos: AB(4), AC(2), AD(7), BC(1), BD(3), CD(5)

Dijkstra desde A:

Iteración	Vértice	$d[A]$	$d[B]$	$d[C]$	$d[D]$
0	-	0	∞	∞	∞
1	A	0	4	2	7
2	C	0	3	2	7
3	B	0	3	2	6
4	D	0	3	2	6

Caminos mínimos desde A:

- $A \rightarrow B$: $A \rightarrow C \rightarrow B$ (peso 3)

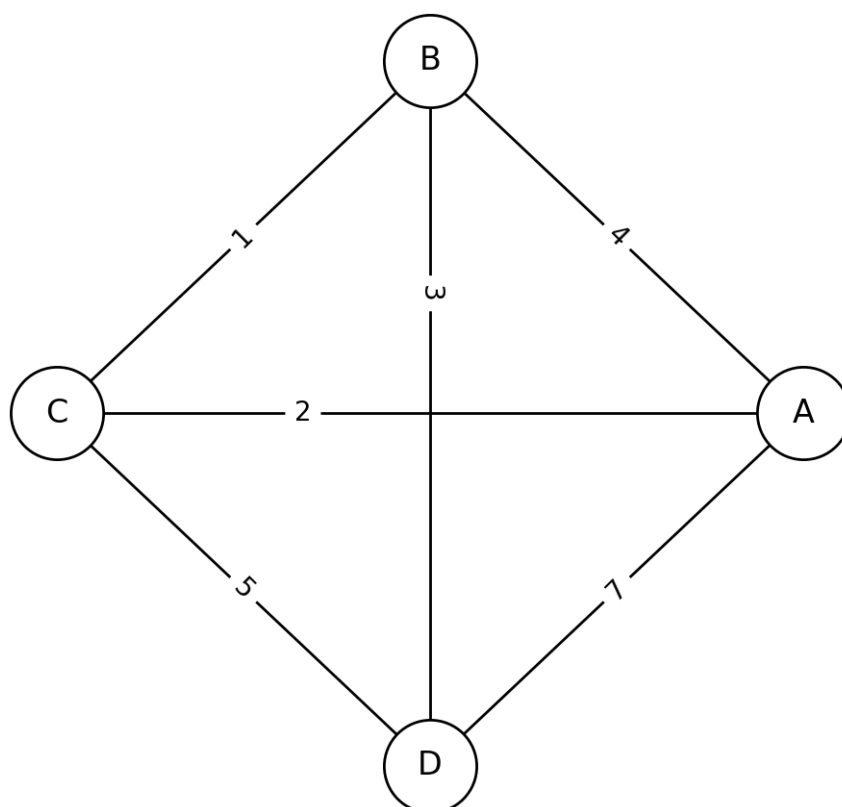


Figura 7.8: Grafo ponderado con cuatro vértices (A, B, C, D) y pesos $AB=4$, $AC=2$, $AD=7$, $BC=1$, $BD=3$, $CD=5$.

- $A \rightarrow C$: $A \rightarrow C$ (peso 2)
- $A \rightarrow D$: $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D$ (peso 6)

Nota (investigación reciente): con un montículo de Fibonacci, Dijkstra tarda $O(m + n \log n)$ y durante décadas se creyó que era lo mejor posible en grafos dirigidos. En 2025, Duan et al. (STOC 2025, premio al mejor artículo) publicaron el primer algoritmo que lo supera en grafos dirigidos dispersos, con coste $O(m \log^{2/3} n)$: evita ordenar todos los vértices por distancia, que es el cuello de botella de Dijkstra.

7.9. GRAFOS PLANOS Y COLORACIÓN

7.9.1. Grafos Planos

Un grafo es **plano** si puede dibujarse en el plano sin que las aristas se crucen.

7.9.1.1. Fórmula de Euler

Para un grafo plano conexo:

$$V - E + F = 2$$

donde V = vértices, E = aristas, F = caras (incluyendo la cara región exterior infinita)

Ejemplo numérico:

Grafo cuadrado: $V = 4$, $E = 4$, $F = 2$ (interior + exterior)

Verificación: $4 - 4 + 2 = 2 \checkmark$

7.9.2. Coloración de Grafos

7.9.2.1. Coloración de Vértices

Una **coloración** asigna colores a vértices tal que vértices adyacentes tengan colores diferentes.

El **número cromático** $\chi(G)$ es el mínimo número de colores necesarios.

Ejemplos numéricos:

- Grafo completo K_n : $\chi(K_n) = n$
- Grafo bipartito: $\chi(G) = 2$ (Un grafo bipartito es un grafo cuyos vértices pueden dividirse en dos conjuntos disjuntos U y V tales que todas las aristas conectan un vértice de U con uno de V , y nunca hay aristas dentro de un mismo conjunto.)
- Ciclo par (numero par de vertices): $\chi(C_{2k}) = 2$
- Ciclo impar (numero impar de vertices): $\chi(C_{2k+1}) = 3$

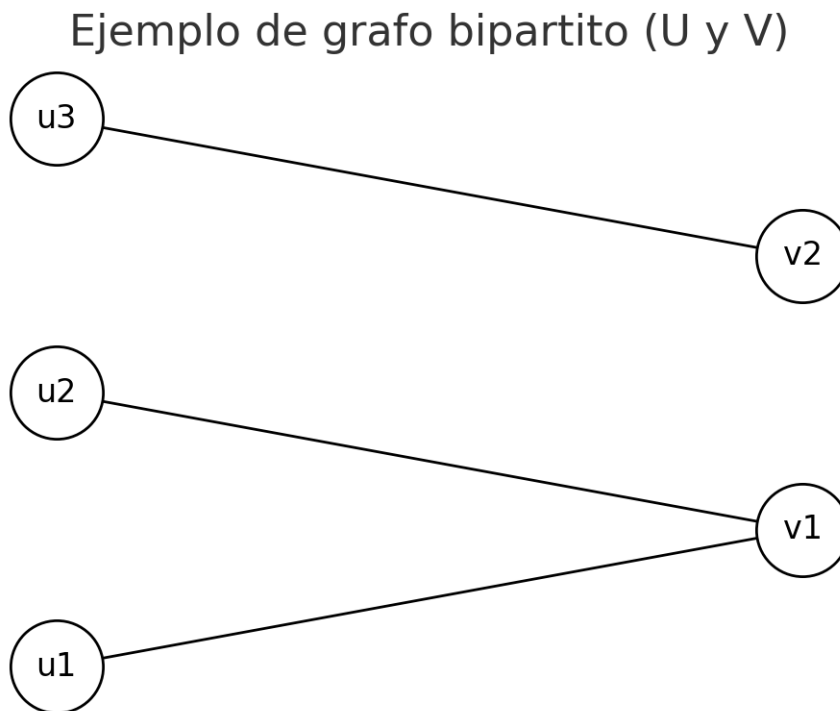


Figura 7.9: Ejemplo de grafo bipartito. Los vértices se dividen en dos conjuntos disjuntos $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $V = \{v_1, v_2\}$, donde todas las aristas conectan vértices de conjuntos distintos.

7.9.2.2. Algoritmo Codicioso de Coloración

Pasos:

1. Ordenar vértices (por grado decreciente u otro criterio)
2. Para cada vértice v en orden Asignar el menor color que no usen sus vecinos ya coloreados

Ejemplo práctico:

Grafo estrella con centro C y hojas A, B, D, E:

- Colorear C: color 1
- Colorear A, B, D, E: todos color 2 (no son adyacentes entre sí)
- $\chi(G) = 2$

7.9.3. Teorema de los Cuatro Colores

Teorema: Todo grafo plano puede colorearse con a lo mucho 4 colores. **Nota histórica:** Conjeturado en 1852, este teorema resistió las demostraciones durante 124 años hasta que Appel y Haken lo probaron en 1976 usando computadoras, siendo la primera demostración matemática asistida por ordenador. **Aplicación:** Coloración de mapas geográficos donde regiones adyacentes deben tener colores diferentes.

Grafo estrella con centro C y hojas A, B, D, E

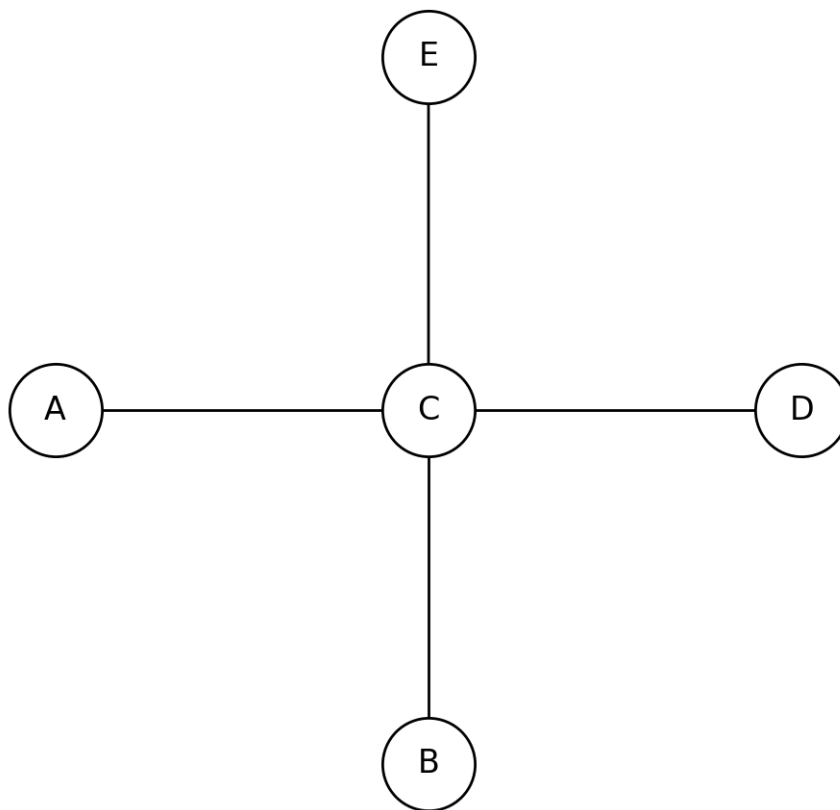


Figura 7.10: Grafo estrella con centro en el nodo C y hojas A, B, D, E conectadas a él.

7.10. REDES Y FLUJOS MÁXIMOS

7.10.1. Redes de Flujo

Una **red de flujo** es un grafo dirigido $G = (V, E)$ donde:

- Existe un vértice **fuente** $s \in V$ (donde se origina el flujo)
- Existe un vértice **sumidero** $t \in V$ (donde termina el flujo)
- Cada arista $(u, v) \in E$ tiene una **capacidad** $c(u, v) \geq 0$
- **Convención:** Si $(u, v) \notin E$, entonces $c(u, v) = 0$

7.10.1.1. Notación y Significados

- $f(u, v)$: Flujo que circula por la arista (u, v)
- $c(u, v)$: Capacidad máxima de la arista (u, v)
- s : Vértice fuente (source) - produce flujo
- t : Vértice sumidero (sink/target) - consume flujo
- $|f|$: Valor total del flujo en la red

7.10.1.2. Propiedades del Flujo

Un **flujo** f satisface:

1. Restricción de Capacidad:

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v) \quad \text{para toda arista } (u, v) \in E$$

El flujo nunca puede exceder la capacidad de la tubería.

2. Conservación de Flujo:

$$\sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v) \quad \text{para } u \in V \setminus \{s, t\}$$

Interpretación: En cada vértice intermedio (que no sea s o t):

- $\sum_v f(v, u)$: Flujo total que **entra** al vértice u
- $\sum_v f(u, v)$: Flujo total que **sale** del vértice u
- **Igualdad:** Lo que entra = Lo que sale (no se acumula ni se pierde)

3. Nota sobre otra convención: algunos textos trabajan con el flujo *neto* e imponen $f(u, v) = -f(v, u)$; en ese caso la restricción 1 se escribe solo $f(u, v) \leq c(u, v)$, sin la cota inferior 0. En este capítulo usamos flujos no negativos, así que esta propiedad no se aplica.

Valor del flujo: $|f| = \sum_v f(s, v) - \sum_v f(v, s)$

Interpretación:

- $\sum_v f(s, v)$: Flujo total que **sale** de la fuente
- $\sum_v f(v, s)$: Flujo total que **entra** a la fuente (normalmente 0)

- $|f|$: Flujo neto que produce la fuente = flujo que consume el sumidero

7.10.1.3. Ejemplo Numérico

Red con capacidades: $s \rightarrow A$ (10), $s \rightarrow B$ (8), $A \rightarrow t$ (6), $B \rightarrow t$ (12), $A \rightarrow B$ (4)

Red de flujo con capacidades

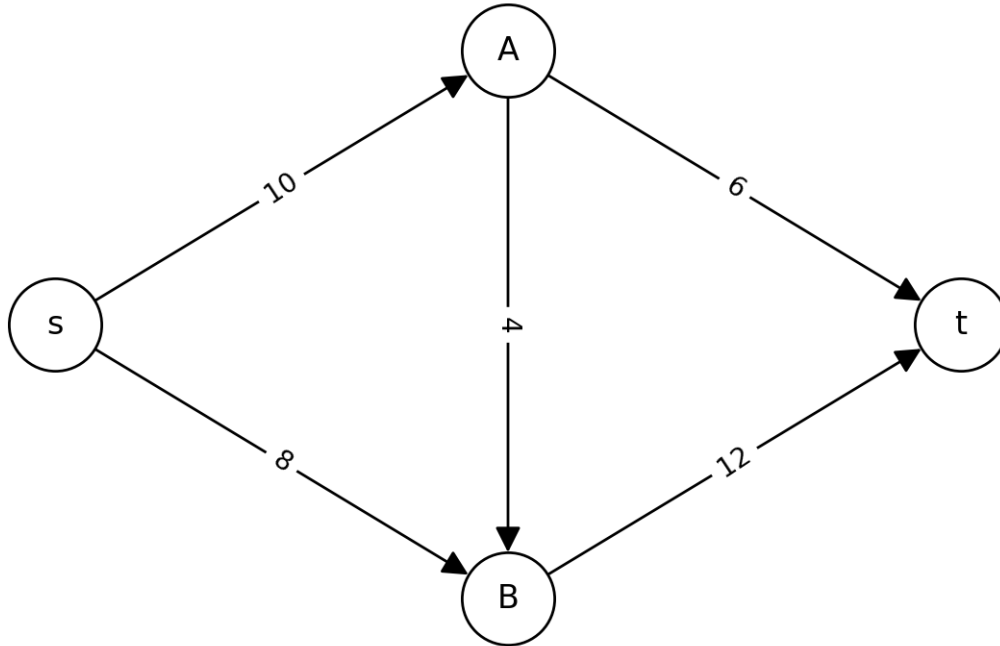


Figura 7.11: Red de flujo con capacidades. Se muestran los nodos fuente s , sumidero t , y las capacidades de cada arista dirigida.

Flujo válido: $f(s,A) = 6$, $f(s,B) = 8$, $f(A,B) = 0$, $f(A,t) = 6$, $f(B,t) = 8$

- **Conservación en A:** $6 = 6$ ✓
- **Conservación en B:** $8 = 8$ ✓
- **Valor del flujo:** $|f| = 6 + 8 = 14$

7.10.2. Algoritmo de Ford-Fulkerson

Encuentra el flujo máximo en una red.

Pasos:

1. Inicializar flujo $f = 0$
2. Mientras exista camino aumentante de s a t :
 - Encontrar capacidad residual mínima del camino
 - Aumentar flujo a lo largo del camino
 - Actualizar capacidades residuales

Ejemplo sobre ejemplo anterior:

Iteración 1: Camino $s \rightarrow A \rightarrow t$

- Capacidad residual: $\min(10, 6) = 6$
- Flujo actual: $f(s,A) = 6, f(A,t) = 6$

Iteración 2: Camino $s \rightarrow B \rightarrow t$

- Capacidad residual: $\min(8, 12) = 8$
- Flujo actual: $f(s,B) = 8, f(B,t) = 8$

Iteración 3: Camino $s \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow t$

- Capacidad residual: $\min(10 - 6, 4, 12 - 8) = 4$
- Flujo acumulado: $f(s,A) = 10, f(A,B) = 4, f(B,t) = 12$

Flujo máximo $|f| = 6 + 8 + 4 = 18$, igual a la capacidad del corte $(\{s\}, \{A, B, t\})$: $10 + 8 = 18$

7.10.3. Teorema de Corte Mínimo - Flujo Máximo

Teorema: En cualquier red, el valor del flujo máximo es igual a la capacidad del corte mínimo.

Definición de corte: Partición (S, T) de vértices con $s \in S$ y $t \in T$.

Capacidad del corte: $c(S, T) = \sum_{u \in S, v \in T} c(u, v)$

Interpretación: Un corte es como “cortar” la red para separar s de t . El teorema dice que el flujo máximo siempre está limitado por el corte con menor capacidad total, que actúa como cuello de botella.

7.11. APLICACIONES INDUSTRIALES

7.11.1. Optimización de Redes de Distribución

Problema: Una empresa debe distribuir productos desde centros de distribución a tiendas minimizando costos de transporte.

Modelado como MST:

- Vértices: centros de distribución y tiendas
- Aristas: rutas posibles
- Pesos: costos de transporte

Ejemplo numérico:

5 ubicaciones con matriz de costos (en miles de €):

	A	B	C	D	E
A	0	12	15	8	20
B	12	0	6	10	14

	A	B	C	D	E
C	15	6	0	9	7
D	8	10	9	0	11
E	20	14	7	11	0

Aplicando Kruskal:

1. Aristas ordenadas: BC (6), CE (7), AD (8), CD (9), BD (10), DE (11), AB (12), BE (14), AC (15), AE (20)
2. Seleccionar: BC, CE, AD, CD
3. **Costo total:** $6 + 7 + 8 + 9 = 30\text{k€}$

7.11.2. Planificación de Proyectos (CPM)

Critical Path Method usa grafos dirigidos para planificar proyectos.

Ejemplo: Construcción de planta industrial

- Actividades y duraciones (días):
 - A (Cimentación): 10 días
 - B (Estructura): 15 días
 - C (Instalación eléctrica): 8 días
 - D (Instalación de equipos): 12 días

Dependencias:

- B depende de A
- C depende de A
- D depende de B y C

Cálculo del camino crítico:

Camino $A \rightarrow B \rightarrow D$: $10 + 15 + 12 = 37$ días

Camino $A \rightarrow C \rightarrow D$: $10 + 8 + 12 = 30$ días

Camino crítico: $A \rightarrow B \rightarrow D$ (37 días)

7.11.3. Análisis de Redes de Suministro

Problema: Determinar la capacidad máxima de flujo de materias primas desde proveedores hasta plantas de producción.

Modelado como red de flujo:

- Fuente: conjunto agregado de proveedores

- Sumidero: conjunto de plantas
- Capacidades: límites de transporte/almacenamiento

Ejemplo numérico:

Red de suministro de acero:

- Proveedor P → Almacén A: 100 ton/día
- Proveedor P → Almacén B: 80 ton/día
- Almacén A → Planta 1: 60 ton/día
- Almacén A → Planta 2: 50 ton/día
- Almacén B → Planta 2: 70 ton/día

Aplicando Ford-Fulkerson:

Flujo máximo = 170 ton/día (A envía 60 a la Planta 1 y 40 a la Planta 2; B envía 70 a la Planta 2).
Corte mínimo: $P \rightarrow A (100) + B \rightarrow \text{Planta 2} (70) = 170$

7.11.4. Optimización de Redes de Comunicación

Problema: Diseñar red de fibra óptica que conecte todas las oficinas con costo mínimo y alta confiabilidad.

Enfoque multi-objetivo:

1. **Costo mínimo:** MST del grafo de costos
2. **Confiabilidad:** Encontrar dos árboles de expansión con aristas disjuntas (redundancia)

Ejemplo numérico:

6 oficinas (cifras ilustrativas; no se reproduce la matriz de costes):

Aplicando algoritmo de MST:

- Conexiones primarias (MST): costo 45k€
- Conexiones redundantes: costo adicional 20k€

Total: 65k€ con redundancia completa

7.11.5. Análisis de Flujo en Procesos Industriales

Problema: Optimizar el flujo de materiales en una línea de producción con múltiples estaciones de trabajo.

Variables del modelo:

- Capacidad de cada estación: c_i unidades/hora

- Tiempo de procesamiento entre estaciones: t_{ij} minutos
- Demanda final: d unidades/hora

Ejemplo numérico:

Línea de ensamblaje de automóviles:

- Estación 1 (Soldadura): 20 autos/hora
- Estación 2 (Pintura): 18 autos/hora
- Estación 3 (Ensamblaje final): 22 autos/hora

Cuello de botella: Estación 2 (18 autos/hora)

Flujo máximo del sistema: 18 autos/hora

7.12. CASOS DE ESTUDIO INDUSTRIAL

7.12.1. Caso 1: Optimización de Rutas de Mantenimiento

Contexto: Una empresa de servicios públicos debe planificar rutas óptimas para equipos de mantenimiento que deben visitar todas las instalaciones en su sector.

Datos del problema:

- 12 instalaciones distribuidas en área metropolitana
- 3 equipos de mantenimiento disponibles
- Tiempo de desplazamiento entre ubicaciones conocido
- Cada instalación debe visitarse exactamente una vez por turno

Modelado como TSP (Traveling Salesman Problem):

Matriz de tiempos (minutos) entre instalaciones clave:

	I1	I2	I3	I4	I5
I1	0	15	23	18	30
I2	15	0	12	25	22
I3	23	12	0	16	19
I4	18	25	16	0	14
I5	30	22	19	14	0

Solución heurística (nearest neighbor desde I1):

1. I1 → I2 (15 min)
2. I2 → I3 (12 min)

3. $I3 \rightarrow I4$ (16 min)

4. $I4 \rightarrow I5$ (14 min)

5. $I5 \rightarrow I1$ (30 min)

Tiempo total: 87 minutos por ruta

Optimización con algoritmo de 2-opt:

Se eliminan las aristas $I3-I4$ e $I5-I1$ y se reconectan como $I3-I5$ e $I4-I1$ (se invierte el tramo $I4-I5$):

Ruta mejorada: $I1 \rightarrow I2 \rightarrow I3 \rightarrow I5 \rightarrow I4 \rightarrow I1$

Tiempo total: $15 + 12 + 19 + 14 + 18 = 78$ minutos

Resultado: 2-opt reduce el tiempo de 87 a 78 minutos (un 10 % menos). Con 5 instalaciones solo hay 12 rutas distintas y se puede comprobar que 78 minutos es el óptimo.

7.12.2. Caso 2: Diseño de Red de Fibra Óptica

Contexto: Proveedor de internet debe conectar 8 ciudades con red de fibra óptica, minimizando costo de instalación mientras garantiza conectividad completa.

Datos:

- Costos de instalación entre ciudades (miles de €):

Matriz de costos:

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	12	18	25	∞	∞	∞	∞
B	12	0	15	8	22	∞	∞	∞
C	18	15	0	10	14	20	∞	∞
D	25	8	10	0	16	19	28	∞
E	∞	22	14	16	0	11	17	24
F	∞	∞	20	19	11	0	13	21
G	∞	∞	∞	28	17	13	0	9
H	∞	∞	∞	∞	24	21	9	0

Aplicación del Algoritmo de Kruskal:

Paso 1: Ordenar aristas por costo:

BD(8), GH(9), CD(10), EF(11), AB(12), FG(13), CE(14), BC(15), DE(16), EG(17), AC(18), DF(19), CF(20), FH(21), BE(22), EH(24), AD(25), DG(28)

Paso 2: Construcción del MST:

1. Añadir BD (8) $\rightarrow$ Componentes: {B,D}, {A}, {C}, {E}, {F}, {G}, {H}
2. Añadir GH (9) $\rightarrow$ Componentes: {B,D}, {A}, {C}, {E}, {F}, {G,H}

3. Añadir CD (10) → Componentes: {B,C,D}, {A}, {E}, {F}, {G,H}
4. Añadir EF (11) → Componentes: {B,C,D}, {A}, {E,F}, {G,H}
5. Añadir AB (12) → Componentes: {A,B,C,D}, {E,F}, {G,H}
6. Añadir FG (13) → Componentes: {A,B,C,D}, {E,F,G,H}
7. Añadir CE (14) → Componentes: {A,B,C,D,E,F,G,H}

MST resultante: BD + GH + CD + EF + AB + FG + CE

Costo total: $8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 77$ mil €

Para comprobarlo: el notebook `Semana4_Aritmetica_Modular_y_Grafos.ipynb` construye esta red con NetworkX y obtiene el mismo árbol con Kruskal. Cambia algún coste y observa qué tramos entran o salen del MST.

Beneficios económicos:

- Red completa directa costaría: 302 mil € (suma de los 18 tramos factibles)
- Ahorro con MST: $302 - 77 = 225$ mil € (75 % de ahorro)

7.12.3. Caso 3: Optimización de Flujo de Producción

Contexto: Planta automotriz debe maximizar el flujo de vehículos a través de línea de ensamblaje con múltiples estaciones y rutas alternativas.

Configuración de la planta:

- Entrada (S): capacidad ilimitada de chasis
- Estación A (Soldadura): capacidad 25 vehículos/hora
- Estación B (Pintura línea 1): capacidad 20 vehículos/hora
- Estación C (Pintura línea 2): capacidad 18 vehículos/hora
- Estación D (Ensamblaje motor): capacidad 30 vehículos/hora
- Estación E (Inspección final): capacidad 22 vehículos/hora
- Salida (T): demanda ilimitada

Conexiones y capacidades:

- $S \rightarrow A$: 25 veh/h
- $A \rightarrow B$: 20 veh/h
- $A \rightarrow C$: 18 veh/h
- $B \rightarrow D$: 20 veh/h

- $C \rightarrow D$: 18 veh/h
- $B \rightarrow E$: 15 veh/h
- $C \rightarrow E$: 12 veh/h
- $D \rightarrow E$: 22 veh/h
- $E \rightarrow T$: 22 veh/h

Aplicación del Algoritmo de Ford-Fulkerson:

Iteración 1: Camino $S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow T$

- Capacidad residual: $\min(25, 20, 15, 22) = 15$ veh/h
- Flujo acumulado: 15 veh/h

Iteración 2: Camino $S \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow T$ (con capacidades residuales)

- Capacidad residual: $\min(10, 18, 12, 7) = 7$ veh/h
- Flujo acumulado: 22 veh/h

Iteración 3: Camino $S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow T$

Capacidad residual: $\min(3, 5, 20, 22, 0) = 0$ (bloqueado por $E \rightarrow T$)

No hay más caminos aumentantes.

Flujo máximo: 22 vehículos/hora

Análisis de cuellos de botella:

- Estación E (Inspección final) es el limitante principal
- Para aumentar producción, se requiere:
 1. Aumentar capacidad de inspección final, o
 2. Añadir línea paralela de inspección

Recomendación: Una segunda línea de inspección solo permite llegar a 25 veh/h, porque entonces el cuello de botella pasa a ser la soldadura ($S \rightarrow A$, 25 veh/h). Para superar los 25 veh/h hay que ampliar a la vez la soldadura y la inspección final.

7.12.4. Caso 4: Planificación de Turnos en Centro de Llamadas

Contexto: Centro de atención al cliente debe asignar operadores a turnos minimizando costos mientras cumple requisitos de cobertura horaria.

Datos del problema:

- 5 operadores disponibles: O1, O2, O3, O4, O5
- 4 turnos de 6 horas: Mañana(6-12), Tarde(12-18), Noche(18-24), Madrugada(24-6)

- Requisitos mínimos por turno: Mañana(2), Tarde(3), Noche(2), Madrugada(1)
- Costos variables por operador/turno (€/día):

Matriz de costos:

	Mañana	Tarde	Noche	Madrugada
O1	120	100	140	180
O2	110	110	130	170
O3	130	95	135	160
O4	125	105	125	175
O5	115	120	150	185

Modelado como problema de coloración de grafos:

- Vértices: combinaciones operador-turno
- Aristas: restricciones (mismo operador no puede trabajar turnos consecutivos)

Restricciones adicionales:

- Cada operador trabaja máximo 2 turnos/día
- No más de 8 horas consecutivas

Solución (enumerando todas las asignaciones posibles):

Asignación óptima:

- Mañana: O2(110), O5(115) = 225€
- Tarde: O1(100), O3(95), O4(105) = 300€
- Noche: O2(130), O5(150) = 280€
- Madrugada: O3(160) = 160€

Costo total diario: $225 + 300 + 280 + 160 = 965€$

Verificación de restricciones:

- ✓ Cobertura mínima cumplida
- ✓ Ningún operador excede 2 turnos
- ✓ No hay turnos consecutivos para mismo operador

Optimización adicional: Implementar rotación semanal para distribuir turnos nocturnos equitativamente.

7.13. CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS

La teoría de grafos es una herramienta fundamental en la ingeniería industrial moderna. Su elegancia matemática se traduce en soluciones prácticas para problemas complejos de optimización:

1. **Modelado unificado:** Permite representar sistemas diversos bajo un marco matemático común
2. **Algoritmos eficientes:** Proporciona métodos probados para resolver problemas de gran escala
3. **Optimización global:** Encuentra soluciones óptimas considerando todas las interacciones del sistema
4. **Escalabilidad:** Los algoritmos pueden manejar redes de miles o millones de elementos

Próximos pasos: En cursos posteriores, estos conceptos se extenderán hacia:

- Grafos dinámicos y optimización en tiempo real
- Teoría de redes complejas y análisis de pequeño mundo
- Algoritmos distribuidos y computación en paralelo
- Inteligencia artificial aplicada a optimización en grafos

“Los problemas más complejos del mundo pueden reducirse a conexiones simples entre elementos”

En la industria 4.0, la teoría de grafos es esencial para entender y optimizar las redes que conectan nuestro mundo digital y físico.

8. INTEGRACIÓN Y SÍNTESIS DE MATEMÁTICAS II

8.1. LA SÍNTESIS MATEMÁTICA EN LA INDUSTRIA

El Curso 8 representa la culminación del programa de Matemáticas II, integrando todas las herramientas desarrolladas en cursos anteriores para abordar problemas complejos reales. En la industria moderna, rara vez utilizamos un solo método matemático; más bien, combinamos transformadas, análisis complejo, ecuaciones diferenciales y métodos numéricos para crear soluciones robustas.

8.1.1. ¿Por qué es esencial la integración matemática?

Ejemplo de aplicación: El diseño de un filtro digital para procesar señales industriales requiere:

- Transformadas de Fourier para analizar frecuencias
- Variable compleja para estudiar estabilidad
- Métodos numéricos para implementación
- Ecuaciones diferenciales para modelar el comportamiento dinámico

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 2}{s^2 + 3s + 2}$$

Esta función de transferencia conecta todos nuestros conocimientos previos en una aplicación práctica.

Observación: como $s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$, el factor $s + 2$ se cancela y $H(s) = \frac{1}{s+1}$: el sistema se comporta como uno de primer orden con un único polo en $s = -1$, y por tanto es estable.

8.2. TRANSFORMADAS INTEGRALES: FOURIER Y LAPLACE

8.2.1. Revisión de la Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es fundamental para resolver EDOs con condiciones iniciales:

- $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$

Propiedades fundamentales:

- $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

- $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
- $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$

Ejemplo básico: Resolver $y'' + 4y = 0$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

- Aplicando Laplace: $s^2 Y(s) - s + 4Y(s) = 0$
- $(s^2 + 4)Y(s) = s$
- $Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$
- $y(t) = \cos(2t)$

8.2.2. Series de Fourier

Las series de Fourier descomponen funciones periódicas en componentes armónicos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

donde:

- $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$
- $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$

Ejemplo básico: Serie de Fourier de la función cuadrada

$$\text{Para } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

- $a_0 = 0$, $a_n = 0$
- $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n]$
- $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin(nx)}{n}$

8.2.3. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier extiende las series a funciones no periódicas:

- $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$

Propiedades importantes:

- $\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$
- $\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-i\omega a} F(\omega)$
- $\mathcal{F}\{e^{iat} f(t)\} = F(\omega - a)$

Ejemplo básico: Transformada de $f(t) = e^{-|t|}$

$$\blacksquare F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-i\omega t} dt = \frac{2}{1+\omega^2}$$

8.3. FUNCIONES ORTOGONALES Y SERIES

8.3.1. Concepto de Ortogonalidad de Funciones

Dos funciones f_1 y f_2 son ortogonales en el intervalo $[a,b]$ si:

$$\blacksquare (f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0$$

Ejemplo básico: Verificar ortogonalidad de $\cos(nx)$ y $\sin(mx)$

$$(\cos(nx), \sin(mx)) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = 0 \text{ para todos } n, m$$

8.3.2. Sistemas Ortogonales Completos

Un conjunto de funciones $\{\phi_n(x)\}$ es ortogonal completo si:

1. $(\phi_n, \phi_m) = 0$ para $n \neq m$
2. Cualquier función **físicamente realizable** (de cuadrado integrable y con discontinuidades finitas) puede expresarse como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

donde:

$$c_n = \frac{(f, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)}$$

8.3.3. Aplicaciones en Resolución de EDPs

Ejemplo básico: Resolver la ecuación de calor con separación de variables

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

Condiciones de frontera: $u(0,t) = u(L,t) = 0$

Solución por separación: $u(x,t) = X(x)T(t)$

- $\blacksquare X(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), T(t) = e^{-k(n\pi/L)^2 t}$
- $\blacksquare u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k(n\pi/L)^2 t}$

8.4. VARIABLE COMPLEJA APLICADA A EDPs

8.4.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Para una función compleja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analítica:

$$\square \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Consecuencia importante: Ambas u y v satisfacen la ecuación de Laplace:

$$\square \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\square \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

8.4.2. Funciones Armónicas

Una función $u(x,y)$ es armónica si satisface la ecuación de Laplace:

$$\square \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Ejemplo básico: Verificar que $u(x,y) = x^2 - y^2$ es armónica

$$\square \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

$$\square \nabla^2 u = 2 + (-2) = 0 \checkmark$$

8.4.3. Transformaciones Conformes

Una transformación es **conforme** si **preserva ángulos** localmente. Esto significa que si dos curvas se intersectan formando un ángulo en el plano original, ese mismo ángulo se mantiene en el plano transformado.

Definición Matemática Una función $w = f(z)$ es **conforme** en un punto z_0 si:

1. f es **analítica** en z_0
2. $f'(z_0) \neq 0$ (derivada no nula)

Ejemplo básico: La transformación $w = z^2$ mapea el primer cuadrante del plano z al semiplano superior del plano w .

Si $z = re^{i\theta}$, entonces $w = r^2 e^{2i\theta}$

8.4.4. Aplicación a Problemas de Flujo

Potencial complejo: $F(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$

donde ϕ es el potencial de velocidad y ψ es la función de corriente.

$\vec{v} = \nabla \phi = (u_x, u_y)$ donde $u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$

8.5. MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS PARA EDPs

8.5.1. Clasificación de EDPs

EDPs Parabólicas: (tipo difusión)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

EDPs Elípticas: (estado estacionario)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

EDPs Hiperbólicas: (tipo onda)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

8.5.2. Diferencias Finitas para EDPs Parabólicas

Aproximación de la derivada temporal:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}$$

Aproximación de la derivada espacial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2}$$

Esquema explícito:

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j)$$

Condición de estabilidad: $\lambda = \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$

8.5.3. Diferencias Finitas para EDPs Elípticas

Para la ecuación de Laplace en 2D:

$$\blacksquare \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Esquema de 5 puntos:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$$

Ejemplo básico: Resolver en malla 3×3 con condiciones de frontera

$$u_{1,1} = \frac{1}{4}(u_{0,1} + u_{2,1} + u_{1,0} + u_{1,2})$$

8.5.4. Diferencias Finitas para EDPs Hiperbólicas

Para la ecuación de onda:

$$\square \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Esquema explícito:

$$u_i^{j+1} = 2u_i^j - u_i^{j-1} + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j)$$

Condición de estabilidad: $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ (condición CFL)

8.6. CONEXIONES INTERDISCIPLINARIAS

8.6.1. Física - Matemáticas

Mecánica cuántica: La ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

Se resuelve usando separación de variables y funciones ortogonales.

Electromagnetismo: Las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Se analizan usando análisis vectorial complejo y transformadas de Fourier.

8.6.2. Ingeniería - Matemáticas

Control de sistemas: Función de transferencia

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Procesamiento de señales: Filtros digitales

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

8.6.3. Economía - Matemáticas

Modelo de Black-Scholes: Para opciones financieras

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Se resuelve usando transformadas y métodos numéricos.

8.7. MODELADO MATEMÁTICO INTEGRAL

8.7.1. Metodología del Modelado Integral

Paso 1: Identificar las variables y parámetros del sistema

Paso 2: Establecer las ecuaciones gobernantes (EDPs, EDOs)

Paso 3: Definir condiciones iniciales y de frontera

Paso 4: Seleccionar el método de solución más apropiado

Paso 5: Implementar solución analítica o numérica

Paso 6: Validar y optimizar el modelo

8.7.2. Ejemplo Integral: Sistema Térmico-Fluido

Problema: Analizar el enfriamiento de un chip electrónico con flujo de aire.

Variables:

- $T(x,y,t)$ = temperatura
- $\vec{v}(x,y)$ = campo de velocidad
- $p(x,y)$ = presión

Ecuaciones gobernantes:

- Conducción de calor: $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{Q}{\rho c_p}$
- Navier-Stokes: $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}$
- Continuidad: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

Métodos de solución:

1. Simplificar usando análisis dimensional
2. Resolver campo de velocidad (variable compleja)
3. Resolver ecuación de calor (separación de variables)
4. Implementar solución numérica (diferencias finitas)

5. Validar con datos experimentales

8.8. EJERCICIOS BÁSICOS FUNDAMENTALES

8.8.1. Ejercicio Básico 1: Transformada de Laplace

Resolver $y'' + 4y' + 3y = e^{-t}$ con $y(0) = 0, y'(0) = 1$

Solución Aplicando Laplace:

$$\blacksquare s^2 Y(s) - 1 + 4sY(s) + 3Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\blacksquare (s^2 + 4s + 3)Y(s) = 1 + \frac{1}{s+1}$$

$$\blacksquare Y(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} + \frac{1}{(s+1)(s^2 + 4s + 3)}$$

Factorizando: $s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3)$

$$\blacksquare Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} + \frac{1}{(s+1)^2(s+3)}$$

Por fracciones parciales: $\frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1/2}{s+1} - \frac{1/2}{s+3}$ y $\frac{1}{(s+1)^2(s+3)} = -\frac{1/4}{s+1} + \frac{1/2}{(s+1)^2} + \frac{1/4}{s+3}$

$$\blacksquare y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{4}e^{-3t}$$

$$\blacksquare y(t) = \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t} + \frac{1}{2}te^{-t}$$

8.8.2. Ejercicio Básico 2: Serie de Fourier

Encontrar la serie de Fourier de $f(x) = x^2$ en $[-\pi, \pi]$

Solución:

$$\blacksquare a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3} \text{ (función par)}$$

$$\blacksquare a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \text{ (producto par} \times \text{par = par)}$$

Por integración por partes (dos veces): * $a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$

$$\blacksquare b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(nx) dx = 0 \text{ (producto par} \times \text{impar = impar)}$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos(x) + \cos(2x) - \frac{4}{9} \cos(3x) + \dots$$

8.8.3. Ejercicio Básico 3: Funciones Armónicas

Verificar que $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ es armónica para $(x,y) \neq (0,0)$ y encontrar su conjugada armónica

Solución:

$$\blacksquare \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

- $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$
- $\nabla^2 u = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0 \checkmark$
- Para la conjugada armónica v :
- $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} \rightarrow v = 2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C$
- $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2+y^2} \checkmark$
- Conjugada armónica: $v(x,y) = 2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

8.8.4. Ejercicio Básico 4: Diferencias Finitas

Resolver $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ con $u(x,0) = \sin(\pi x), u(0,t) = u(1,t) = 0$

Solución numérica con $\Delta x = 0.25, \Delta t = 0.01$:

- $\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{0.01}{(0.25)^2} = 0.16 < 0.5 \checkmark$ (estable)
- $u_i^{j+1} = u_i^j + 0.16(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j)$
- Valores iniciales: $u_1^0 = \sin(\pi \cdot 0.25) = 0.707, u_2^0 = \sin(\pi \cdot 0.5) = 1.0, u_3^0 = 0.707$
- Primer paso temporal:
- $u_1^1 = 0.707 + 0.16(0 - 2(0.707) + 1.0) = 0.641$
- $u_2^1 = 1.0 + 0.16(0.707 - 2(1.0) + 0.707) = 0.906$

Comprobación: la solución exacta es $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$; en $t = 0.01$ da $u(0.25) = 0.6407$ y $u(0.5) = 0.9060$, así que un solo paso ya acierta en tres cifras.

8.8.5. Ejercicio Básico 5: Transformaciones Conformes

Encontrar la imagen del rectángulo $0 < x < 1, 0 < y < \pi$ **bajo** $w = e^z$

Solución:

- $w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$
- $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$
- $|w| = e^x, \arg(w) = y$

Para el rectángulo:

- $x = 0: |w| = 1, 0 < \arg(w) < \pi \rightarrow$ semicírculo superior unitario
- $x = 1: |w| = e, 0 < \arg(w) < \pi \rightarrow$ semicírculo superior de radio e
- $y = 0: 1 < |w| < e, \arg(w) = 0 \rightarrow$ segmento real positivo
- $y = \pi: 1 < |w| < e, \arg(w) = \pi \rightarrow$ segmento real negativo

La imagen es el semianillo $1 < |w| < e, 0 < \arg(w) < \pi$

8.9. APLICACIONES INDUSTRIALES AVANZADAS

8.9.1. Diseño de Sistemas de Control Térmico

Problema: Diseñar un controlador para mantener la temperatura de un reactor químico a 350°C.

Modelo del proceso:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\tau}(u - T) + \frac{Q_{\text{reacción}}}{C_p}$$

donde $\tau = 10$ min es la constante de tiempo, u es la entrada de control, y $Q_{\text{reacción}}$ es el calor de reacción.

Función de transferencia:

$$G(s) = \frac{T(s)}{U(s)} = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau} = \frac{0.1}{s + 0.1}$$

Controlador PID:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

Diseño usando criterios de respuesta:

1. **Margen de fase:** $PM \geq 60^\circ$
2. **Tiempo de establecimiento:** $t_s < 50$ minutos
3. **Sobrepaso máximo:** $MP < 10\%$

Solución:

- Sistema en lazo cerrado: $\frac{T(s)}{T_{ref}(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$
- Por cancelación polo-cero: con $K_d = 0$ y $K_i/K_p = 1/\tau = 0.1$, el cero del PI cancela el polo de la planta y el lazo cerrado queda $\frac{0.1K_p}{s+0.1K_p}$
- $K_p = 1, K_i = 0.1, K_d = 0$ (para una planta de primer orden basta un PI)
- Verificación: lazo cerrado de primer orden con constante de tiempo 10 min: $t_s \approx 4 \cdot 10 = 40$ min < 50 min, sobrepaso nulo y margen de fase de 90°

8.9.2. Análisis Modal de Estructuras

Problema: Analizar las frecuencias naturales de vibración de una viga en voladizo sometida a cargas dinámicas.

Ecuación de Euler-Bernoulli:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(x, t)$$

donde E = módulo de Young, I = momento de inercia, ρ = densidad, A = área de sección.

Separación de variables: $y(x, t) = Y(x)T(t)$

$$Y(x) = A \cosh(\lambda x) + B \sinh(\lambda x) + C \cos(\lambda x) + D \sin(\lambda x)$$

Condiciones de frontera para viga en voladizo:

- $x = 0$: $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ (empotramiento)
- $x = L$: $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3 y}{dx^3} = 0$ (extremo libre)

Frecuencias naturales:

$$\omega_n = (\lambda_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}$$

donde λ_n son las raíces de la ecuación característica:

- $\cosh(\lambda L) \cos(\lambda L) + 1 = 0$

Valores numéricos típicos: Para una viga de acero ($E = 200$ GPa, $\rho = 7850$ kg/m³):

- Primer modo: $\lambda_1 L = 1.875 \rightarrow f_1 = 22.4$ Hz
- Segundo modo: $\lambda_2 L = 4.694 \rightarrow f_2 = 140.4$ Hz

8.9.3. Procesamiento Digital de Señales

Problema: Diseñar un filtro digital para eliminar ruido de alta frecuencia en señales de sensores industriales.

Especificaciones:

- Frecuencia de muestreo: $f_s = 1000$ Hz
- Frecuencia de corte: $f_c = 100$ Hz
- Atenuación en banda de paso: < 1 dB
- Atenuación en banda de rechazo: > 40 dB

Función de transferencia discreta:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Transformación bilineal: Del dominio s al dominio z

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \text{ donde } T = 1/f_s$$

Filtro Butterworth de segundo orden:

$$H(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2}$$

Con $\omega_c = 2\pi \cdot 100 \text{ rad/s}$.

Implementación numérica:

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2]$$

Coefficientes calculados:

- $b_0 = 0.0675, b_1 = 0.1349, b_2 = 0.0675$
- $a_1 = -1.1430, a_2 = 0.4128$

8.9.4. Modelado de Transferencia de Calor en Intercambiadores

Problema: Optimizar el diseño de un intercambiador de calor de tubos y coraza para una planta petroquímica.

Parámetros del sistema:

- Flujo de fluido caliente: $\dot{m}_h = 2 \text{ kg/s}$ a $T_{h,in} = 180^\circ\text{C}$
- Flujo de fluido frío: $\dot{m}_c = 1.5 \text{ kg/s}$ a $T_{c,in} = 20^\circ\text{C}$
- Longitud del intercambiador: $L = 4 \text{ m}$
- Coeficiente global: $U = 500 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$

Ecuaciones de balance:

Fluido caliente:

$$\dot{m}_h c_{p,h} \frac{dT_h}{dx} = -U A_s \frac{T_h - T_c}{A_c}$$

Fluido frío:

- $\dot{m}_c c_{p,c} \frac{dT_c}{dx} = U A_s \frac{T_h - T_c}{A_c}$

Solución analítica para contracorriente:

$$\frac{T_{c,out} - T_{c,in}}{T_{h,in} - T_{c,in}} = \frac{1 - \exp(-NTU(1 - R))}{1 - R \exp(-NTU(1 - R))}$$

donde:

- $NTU = \frac{UA_s}{\dot{m}_c c_{p,c}} = 8.33$
- $R = \frac{\dot{m}_c c_{p,c}}{\dot{m}_h c_{p,h}} = 0.75$

Resultado numérico:

- $T_{h,out} = 64.1^\circ C, T_{c,out} = 174.5^\circ C$
- Efectividad: $\epsilon = 0.966$ (96.6 % de la transferencia máxima teórica)

8.9.5. Análisis de Estabilidad de Sistemas Dinámicos

Problema: Analizar la estabilidad de un péndulo invertido controlado para un robot de equilibrio.

Modelo linealizado:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L}\theta + \frac{1}{mL^2}u$$

donde θ es el ángulo, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $L = 0.5 \text{ m}$ es la longitud, $m = 1 \text{ kg}$ es la masa, y u es el torque de control.

Representación en espacio de estados:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\text{donde } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/L & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/(mL^2) \end{bmatrix}$$

Análisis de estabilidad: Valores propios de $\mathbf{A}$

- $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - \frac{g}{L} = 0$
- $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{L}} = \pm 4.43 \text{ rad/s}$

Sistema inestable (polo en semiplano derecho).

Controlador por retroalimentación de estados:

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -[k_1 \quad k_2] \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Sistema en lazo cerrado:

$$\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/L - 4k_1 & -4k_2 \end{bmatrix}$$

Criterio de estabilidad: $k_1 > \frac{g}{4L} = 4.905$ y $k_2 > 0$

Diseño óptimo: Usando LQR con $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = 1$

$$\mathbf{K} = [16.0 \quad 3.0]$$

Verificación: valores propios de $\mathbf{A}_{cl}$ son $-6.0 \pm 2.9i$ (estables).

8.10. CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS

El Curso 8 representa la síntesis de todo el programa de Matemáticas II, demostrando cómo la integración de diferentes herramientas matemáticas permite abordar problemas industriales complejos. La combinación de:

1. **Transformadas integrales** para análisis en diferentes dominios
2. **Variable compleja** para problemas bidimensionales y análisis de estabilidad
3. **Métodos numéricos** para implementación práctica de soluciones teóricas
4. **Modelado integral** para sistemas multifísicos

Proporciona una base sólida para la innovación tecnológica y la resolución de problemas avanzados en ingeniería.

Perspectivas futuras: Este enfoque integrador prepara para:

- Matemáticas aplicadas especializadas (elementos finitos, dinámica de fluidos computacional)
- Investigación en sistemas complejos y multifísicos
- Desarrollo de software de simulación industrial
- Modelado de sistemas de inteligencia artificial y control adaptativo

Competencias desarrolladas:

Pensamiento sistémico: Capacidad para integrar diferentes áreas matemáticas

Modelado matemático: Traducir problemas reales a formulaciones matemáticas

Implementación numérica: Conexión entre teoría y práctica computacional

Optimización: Diseño de sistemas eficientes y robustos

“La verdadera potencia de las matemáticas no radica en dominios aislados, sino en su capacidad para integrarse y crear soluciones elegantes a problemas complejos.”

En la industria del siglo XXI, esta síntesis matemática es esencial para la innovación tecnológica y el desarrollo sostenible.

BIBLIOGRAFÍA

1. **Bonacina, M. S., Teti, C. M., Haidar, A. P., & Bortolato, S. A.** (2014). *Cálculo diferencial e integral* [PDF]. Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto Abiertos (Proyecto LATIn).
2. **Argomedeo Cornejo, S., Herrera Tobar, J., Molina Alfaro, K., & Relos Paco, S.** (2014). *Álgebra lineal para ingeniería* [PDF]. Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto Abiertos (Proyecto LATIn).
3. **Ramírez Ríos, J. H.** (2022). *Ecuaciones diferenciales: Libro interactivo* [PDF]. RED Digital Educativa Descartes.
4. **Rodríguez Ojeda, L.** (2011). *Análisis numérico básico: Un enfoque algorítmico con el soporte de MATLAB®* [PDF]. Instituto de Ciencias Matemáticas, Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL), Guayaquil, Ecuador.
5. **Burgos Navarro, M., García Miranda, J., García Sánchez, P. A., & Rosales, J. C.** (s. f.). *Matemática discreta y álgebra lineal* [Apuntes PDF]. Departamento de Análisis Matemático & Departamento de Álgebra, Universidad de Granada.
6. **Tristán Vega, L. A., Sanz, J., Galindo, F., & Núñez, M.** (2015). *Variable compleja (40020): Resumen de teoría y ejercicios propuestos* [Apuntes PDF]. Universidad de Valladolid, Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología.

Recursos adicionales:

- Software de cálculo: MATLAB/Simulink, Mathematica, Python (SciPy)
- Herramientas de optimización: Gurobi, CPLEX, OR-Tools
- Estándares industriales: ISO 9001 (calidad), ISO 14001 (medio ambiente)

