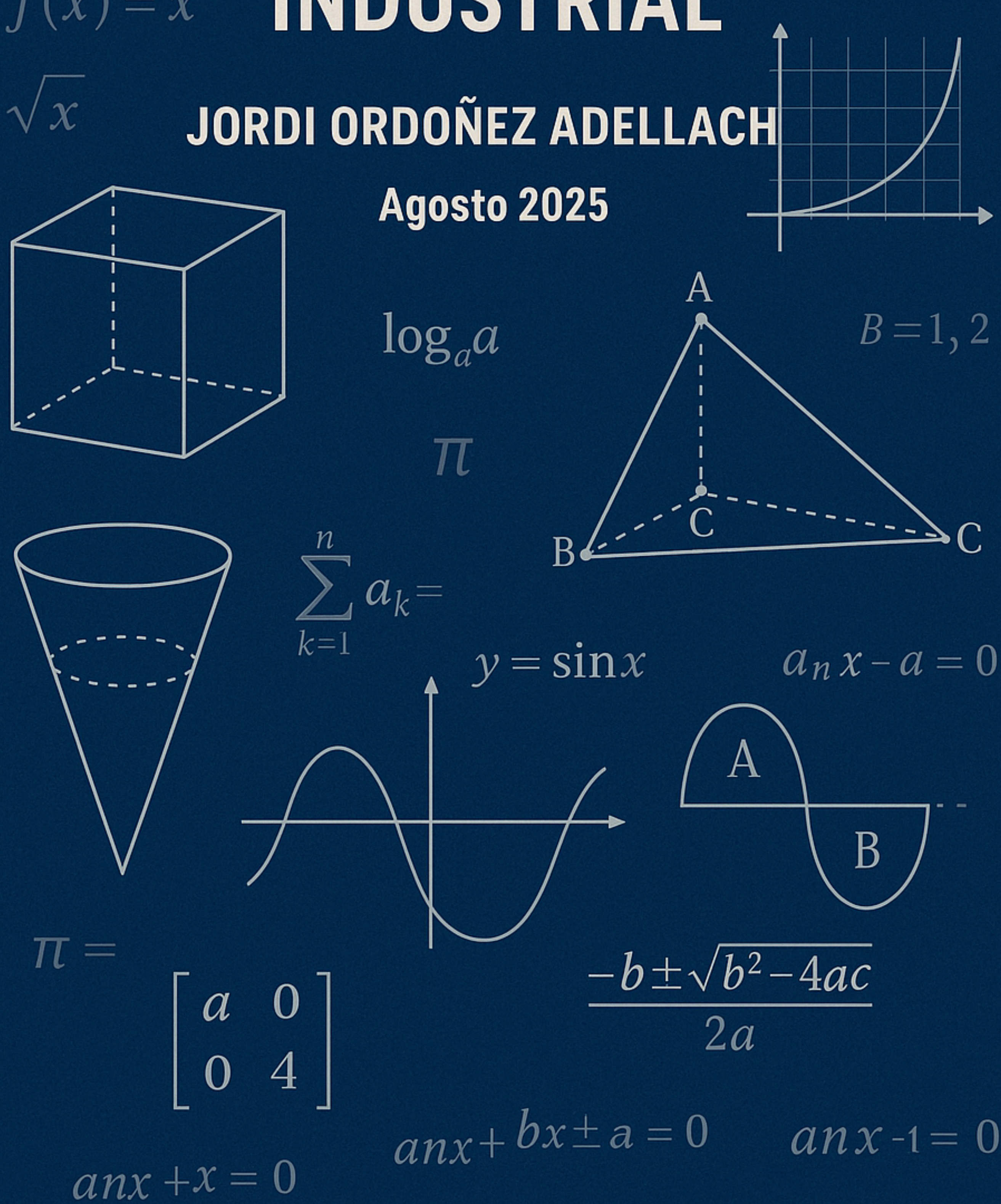
MATEMÁTICA 1
PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL

JORDI ORDOÑEZ ADELLACH

Agosto 2025



Matemática 1 para la Ingeniería Industrial

Manual de apoyo para estudiantes de la Universidad Carlemany

Autor: Jordi Ordóñez Adellach

1ª Edición - Agosto de 2025

Serie completa (del mismo autor):

- Matemática 1 para la Ingeniería Industrial
- Matemática 2 para la Ingeniería Industrial
- Ejercicios Básicos de Matemática 1 para la Ingeniería Industrial
- Ejercicios Básicos de Matemática 2 para la Ingeniería Industrial

(Agosto de 2025)

Tabla de contenidos

Introducción

Presentación del manual

Este manual nace con una intención clara: acompañar al estudiante de ingeniería en un recorrido matemático intenso, pero necesario, para comprender y transformar la realidad industrial. Se ha escrito apoyándose en libros abiertos con licencias que permiten su uso, adaptación y difusión, con el propósito de que el mayor número posible de estudiantes pueda aprovecharlos como soporte. La condición es sencilla: mantener ese espíritu abierto, colaborativo y solidario que tanto necesita nuestra comunidad académica.

La ingeniería obliga a digerir en muy poco tiempo una cantidad inmensa de conceptos. Este libro no pretende que te conviertas en una máquina de cálculo —para eso ya están los ordenadores, la inteligencia artificial y las herramientas de software—, sino que aprendas a leer la realidad en el lenguaje de las matemáticas: a entender cómo un número se convierte en magnitud física, cómo una fórmula refleja un proceso industrial y cómo un modelo ayuda a prever, optimizar o decidir.

Es importante subrayar que este texto no entra en el detalle exhaustivo de todos los conceptos matemáticos. Se asume que el estudiante universitario ya conoce, al menos en parte, muchas de las nociones aquí presentes. El valor añadido está en refrescar ideas, ofrecer ejemplos concretos, y sobre todo, mostrar oportunidades de asociar cada concepto a problemas reales de la ingeniería. Así, cada tema se convierte en un recordatorio aplicado más que en una lección repetitiva.

Cada capítulo busca ilustrar los conceptos con aplicaciones industriales reales. Porque las matemáticas no son un fin en sí mismo, sino un puente: entre los números y las interpretaciones, entre lo determinista y lo probabilístico, entre la teoría y la práctica.

La invitación es sencilla: abre el capítulo que más inseguridad te genere y usa las herramientas de la era digital (IA, foros, comunidades, recursos en línea) para complementarlo. No olvides que las comunidades de estudiantes y las universidades —presenciales o en línea— son tu santuario de validación, donde las dudas se convierten en aprendizaje compartido.

Este texto se ha preparado como soporte de la asignatura en la Universidad Carlemany, que complementa el estudio con cápsulas en vídeo, videoconferencias y espacios de evaluación.

Finalmente, una advertencia con sonrisa: la matemática que aquí encontrarás no es un monstruo, sino una visión alternativa de la realidad. Un mundo paralelo donde los problemas tienen soluciones claras, que luego podemos traer de vuelta al mundo cotidiano para construir, diseñar y mejorar. Ese es el objetivo: formar ingenieros capaces de usar las herramientas de su tiempo con criterio y pasión.

Sobre el autor

Jordi Ordoñez Adellach es matemático, con un Máster 2 y la Agrégation de la ENS de Rennes. Tras más de 20 años de experiencia como profesor de matemáticas en secundaria y universidad, ha combinado la docencia con la consultoría y el desarrollo de aplicaciones digitales. Fundador de Solucions Digitals

JOA, crea aplicaciones y automatizaciones de alto impacto, forma equipos en inteligencia artificial y lidera Climbex, una plataforma de analítica en tiempo real para salas de escalada. También ha trabajado como analista de datos y consultor para empresas y administraciones públicas, aportando soluciones innovadoras y prácticas. Apasionado por las matemáticas aplicadas, su enfoque siempre ha sido tender puentes entre la teoría y la práctica, ayudando a estudiantes y profesionales a entender los números como herramientas para leer y transformar la realidad.

1. FUNDAMENTOS NUMÉRICOS Y NÚMEROS COMPLEJOS

1.1. INTRODUCCIÓN: LOS NÚMEROS EN LA INDUSTRIA

En el mundo industrial moderno, los números complejos no son una abstracción matemática, sino herramientas fundamentales para resolver problemas reales. Desde el análisis de circuitos eléctricos hasta el control de motores, pasando por el procesamiento de señales y la mecánica de fluidos, estos números proporcionan un lenguaje elegante y poderoso para describir fenómenos que involucran magnitud y fase.

1.1.1. ¿Por qué necesitamos números complejos en la industria?

Ejemplo de aplicación: En un motor eléctrico trifásico, la corriente y el voltaje no están necesariamente en fase. El desfase entre ellos afecta directamente la eficiencia energética y el par motor. Los números complejos nos permiten representar simultáneamente la magnitud y el desfase, simplificando enormemente los cálculos.

1.2. FUNDAMENTOS DE NÚMEROS REALES

1.2.1. Conjuntos Numéricos

Los números reales $\mathbb{R}$ forman la base de nuestro sistema numérico:

- **Naturales ($\mathbb{N}$):** $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ - Para contar unidades de producción
- **Enteros ($\mathbb{Z}$):** $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ - Para representar ganancias/pérdidas
- **Racionales ($\mathbb{Q}$):** Fracciones p/q - Para concentraciones, eficiencias
- **Irracionales ($\mathbb{I}$):** π, $\sqrt{2}$, e - Constantes físicas fundamentales
- **Reales ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$):** El conjunto completo

1.2.2. Propiedades Fundamentales

Valor Absoluto Para $x \in \mathbb{R}$:

$|x| = x$ si $x \geq 0$

$|x| = -x$ si $x < 0$

Ejemplos numéricos:

- $|3,1| = 3,1$
- $|-3,1| = 3,1$

- $|10| = 10$
- $|-7,5| = 7,5$
- $|0| = 0$

Aplicación industrial: El valor absoluto representa la magnitud de una medición, independientemente de su dirección (velocidad vs rapidez, corriente vs intensidad).

Intervalos y Tolerancias En control de calidad industrial:

- Intervalo cerrado [a,b]: incluye los extremos (tolerancia exacta)
- Intervalo abierto (a,b): excluye los extremos (tolerancia estricta)

Ejemplos numéricos:

- $[2,5]$: incluye 2, 3, 4 y 5
- $(2,5)$: incluye números entre 2 y 5, pero no 2 ni 5
- $[-1,3]$: incluye -1, 0, 1, 2 y 3
- $(-\infty, 0)$: todos los números negativos
- $[0, +\infty)$: todos los números no negativos

Ejemplo industrial: Una pieza debe tener un diámetro de 50±0,1 mm, representado como [49.9, 50.1].

1.3. INTRODUCCIÓN A LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1.3.1. Definición y Notación

Un número complejo z se define como:
$z = a + bi$
donde:

- $a = Re(z)$ es la parte real
- $b = Im(z)$ es la parte imaginaria
- i es la unidad imaginaria ($i^2 = -1$)

Ejemplos numéricos:

- $z_1 = 3 + 4i \Rightarrow Re(z_1) = 3, Im(z_1) = 4$
- $z_2 = -2 + 5i \Rightarrow Re(z_2) = -2, Im(z_2) = 5$
- $z_3 = 7 - 3i \Rightarrow Re(z_3) = 7, Im(z_3) = -3$
- $z_4 = 6 \Rightarrow Re(z_4) = 6, Im(z_4) = 0$ (número real)
- $z_5 = -4i \Rightarrow Re(z_5) = 0, Im(z_5) = -4$ (imaginario puro)

1.3.2. Representación Geométrica

Los números complejos se representan en el **plano complejo**:

- Eje horizontal: parte real
- Eje vertical: parte imaginaria
- Cada punto (a,b) corresponde al número complejo $a + bi$

1.3.3. El Módulo y su Significado

El módulo de $z = a + bi$ es:
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
Ejemplos numéricos:

- $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
- $|-2 + 5i| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} \approx 5,39$
- $|7 - 3i| = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58} \approx 7,62$
- $|6| = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6$
- $|-4i| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$

1.3.4. Operaciones Básicas

Suma y Resta $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$
Ejemplos numéricos:

- $(3 + 4i) + (2 - 5i) = (3 + 2) + (4 - 5)i = 5 - i$
- $(7 - 2i) - (1 + 3i) = (7 - 1) + (-2 - 3)i = 6 - 5i$

Multiplicación $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
Ejemplos numéricos:

- $(1 + 2i)(4 - 2i) = (1\times4 - 2\times(-2)) + (1\times(-2) + 2\times4)i = (4 + 4) + (-2 + 8)i = 8 + 6i$
- $(3 + i)(2 + 3i) = (3\times2 - 1\times3) + (3\times3 + 1\times2)i = (6 - 3) + (9 + 2)i = 3 + 11i$

Conjugado $\bar{z} = a - bi$ (cambia el signo de la parte imaginaria)
Ejemplos numéricos:

- Si $z = 3 + 4i \Rightarrow \overline{z} = 3 - 4i$
- Si $z = -2 + 5i \Rightarrow \overline{z} = -2 - 5i$
- Si $z = 7 - 3i \Rightarrow \overline{z} = 7 + 3i$

Propiedad importante: $z\times\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$
Ejemplo: $(3 + 4i)(3 - 4i) = 9 - 12i + 12i - 16i^2 = 9 + 16 = 25 = |3 + 4i|^2$

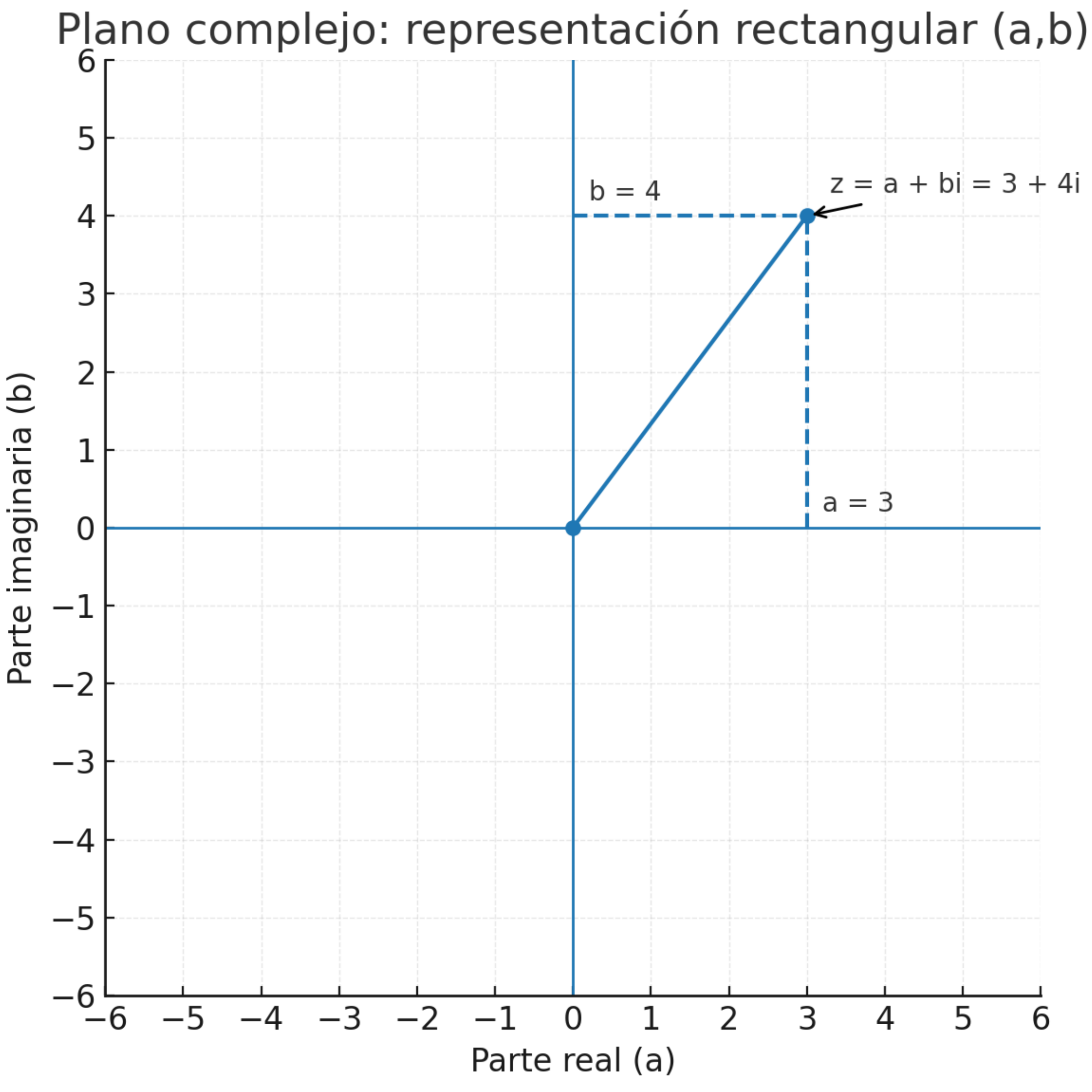


Figura 1.1: Figura 1.1: Representación del punto $z = 3 + 4i$ con sus proyecciones sobre los ejes real e imaginario. Esta visualización muestra cómo $z = a + bi$ se puede interpretar como un vector (a, b), útil para sumar/restar complejos por componentes.

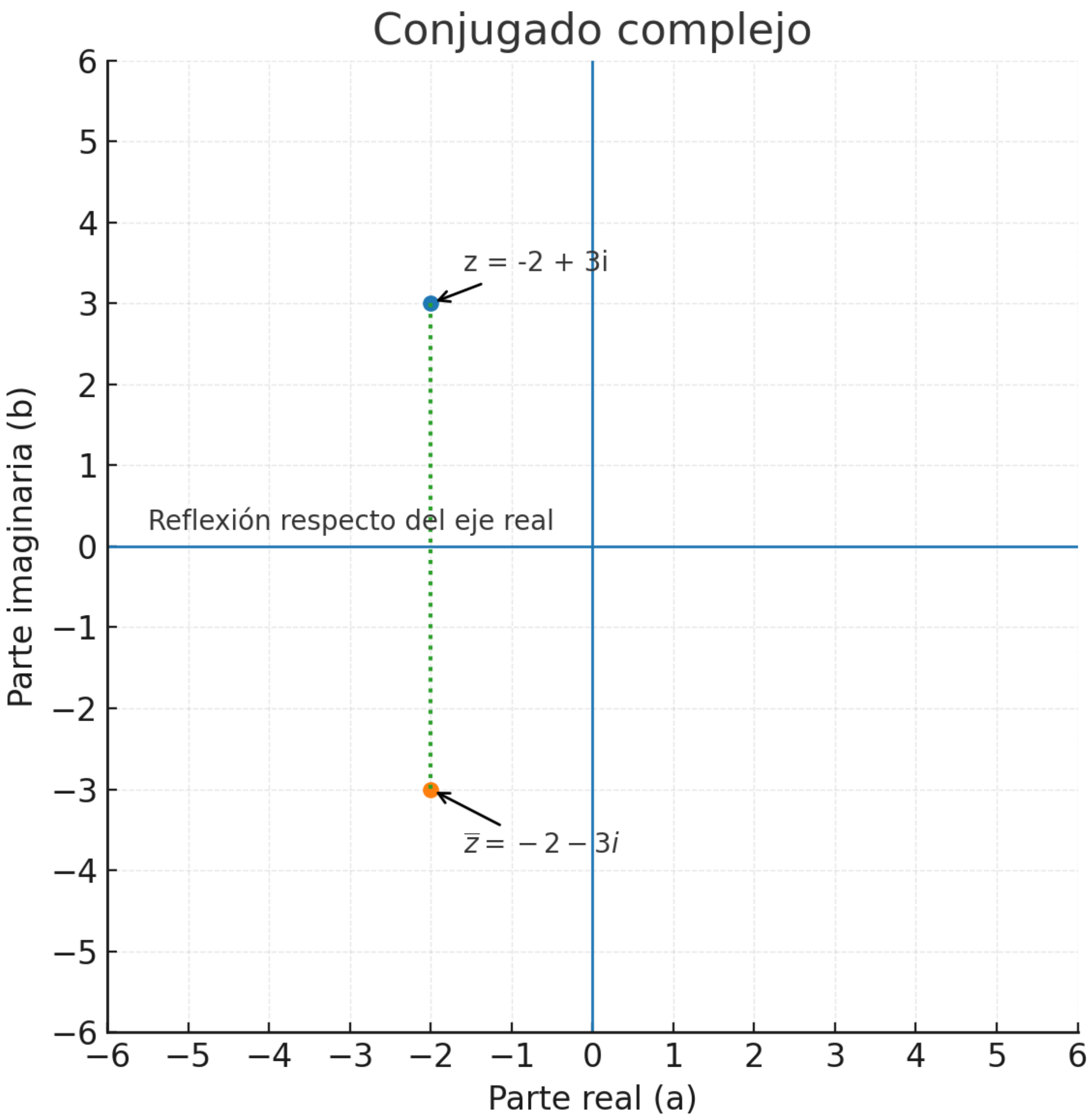


Figura 1.2: Figura 1.2: Representación de $z = -2+3i$ y su conjugado $\overline{z} = -2-3i$, reflejados respecto del eje real. Esta figura muestra que $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ y cómo el conjugado invierte el signo de la parte imaginaria.

1.4. FORMA POLAR Y APLICACIONES

1.4.1. Forma Polar

Todo número complejo z ≠ 0 puede expresarse como:
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$
donde:

- $r = |z|$ es el módulo
- $= arg(z)$ es el argumento (ángulo)

1.4.2. Conversión entre Formas

De rectangular a polar:
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\theta =$ arctan(b/a) (considerando el cuadrante)
De polar a rectangular:
$a = r\cos\theta$
$b = r\sin\theta$
Ejemplos numéricos:
Ejemplo 1: Convertir $z = 3 + 4i$ a forma polar
$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$
$\theta =$ arctan$(4/3) = 53,13° = 0,927$ rad
Forma polar: $z = 5e^{i\cdot 0,927} = 5e^{i53,13°}$
Ejemplo 2: Convertir $z = 4e^{i\pi/6}$ a forma rectangular
$a = 4\cos(\pi/6) = 4 \times (\sqrt{3}/2) = 2\sqrt{3} \approx 3,464$
$b = 4\sin(\pi/6) = 4 \times (1/2) = 2$
Forma rectangular: $z = 2\sqrt{3} + 2i$
Ejemplo 3: Convertir $z = -2 + 2i$ a forma polar
$r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$
$\theta =$ arctan$(2/(-2)) + \pi = -\pi/4 + \pi = 3\pi/4$
Forma polar: $z = 2\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$

1.4.3. Ventajas de la Forma Polar

La multiplicación y división son más simples:
$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
$z_1/z_2 = (r_1/r_2)e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
Los módulos se multiplican/dividen y los argumentos se suman/restan.
Ejemplos numéricos:
Multiplicación:

- $z_1 = 2e^{i\pi/6}$ y $z_2 = 3e^{i\pi/4}$
- $z_1 z_2 = (2 \cdot 3)e^{i(\pi/6+\pi/4)} = 6e^{i5\pi/12}$

División:

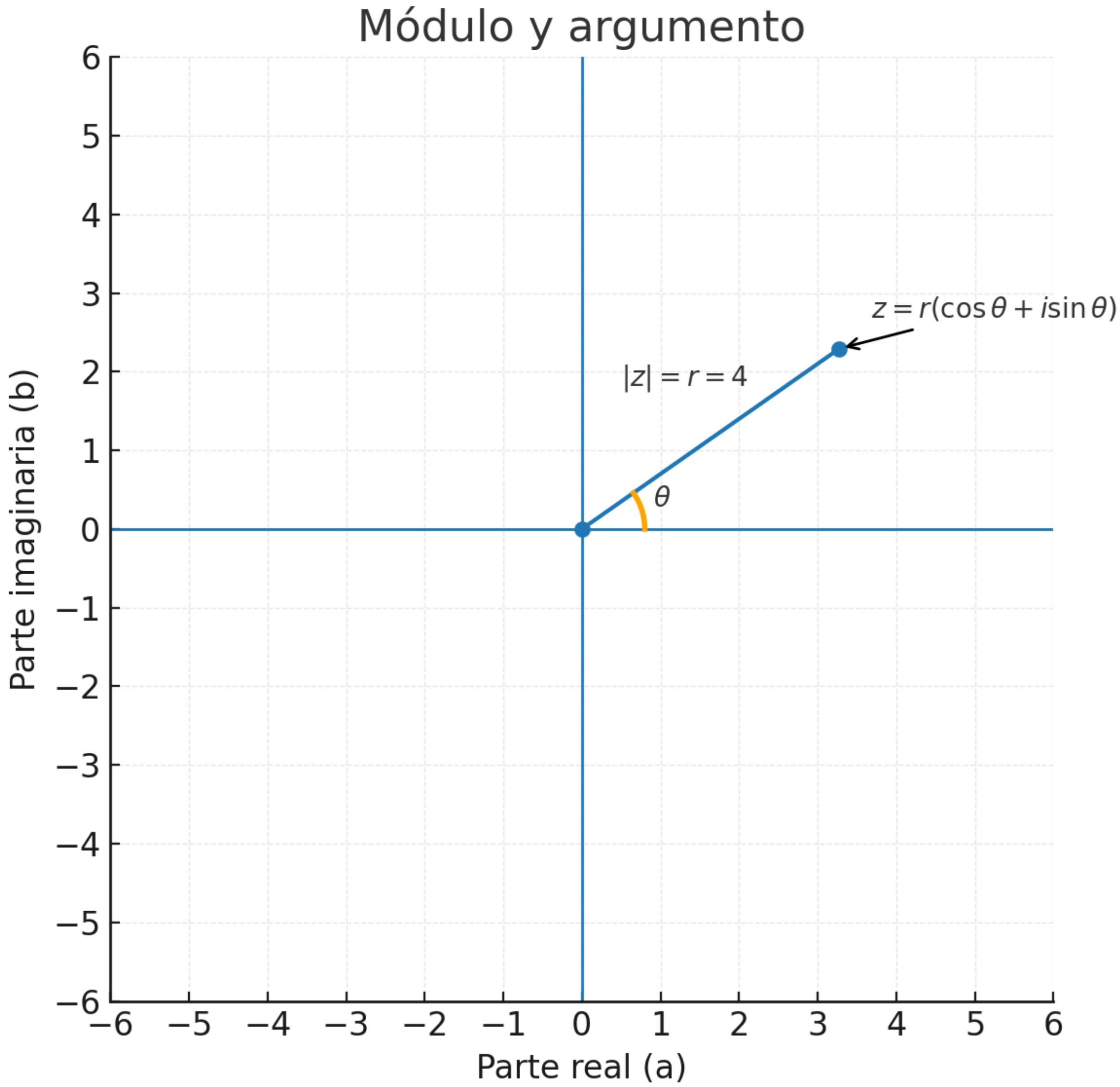


Figura 1.3: Figura 1.3: Representación en forma polar del número complejo $z = 4(\cos\theta + i\sin\theta)$. Se ilustra el módulo $|z| = r = 4$ como la longitud del vector desde el origen, y el argumento θ como el ángulo medido desde el eje real positivo. Esta figura resalta la interpretación geométrica del módulo y el argumento en el plano complejo.

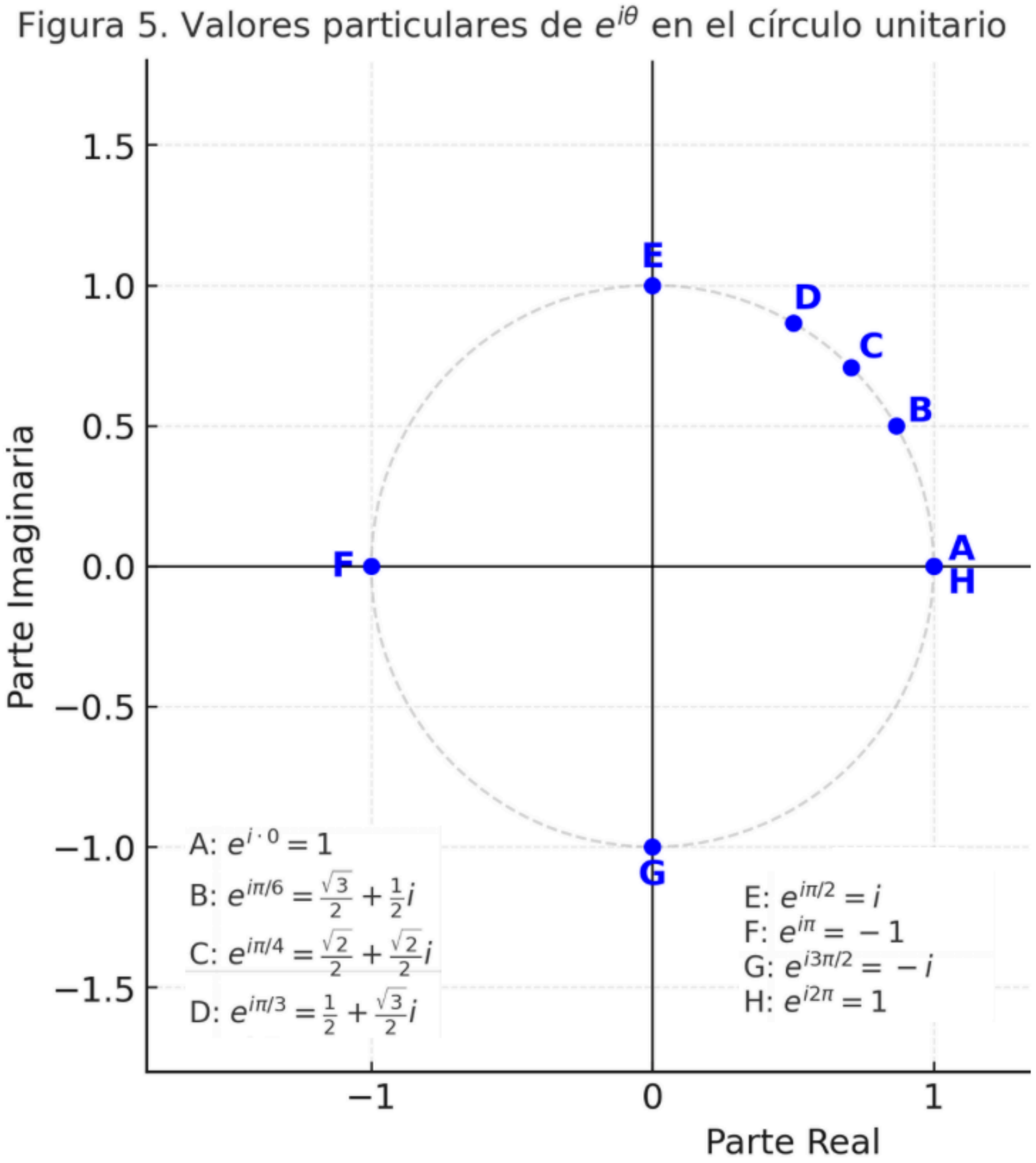


Figura 1.4: Figura 1.4: Valores particulares de $e^{i\theta}$ en el círculo unitario. Cada punto A–H corresponde a un ángulo especial (0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π), ilustrando que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. El recuadro muestra la correspondencia exacta de cada punto con su forma trigonométrica.

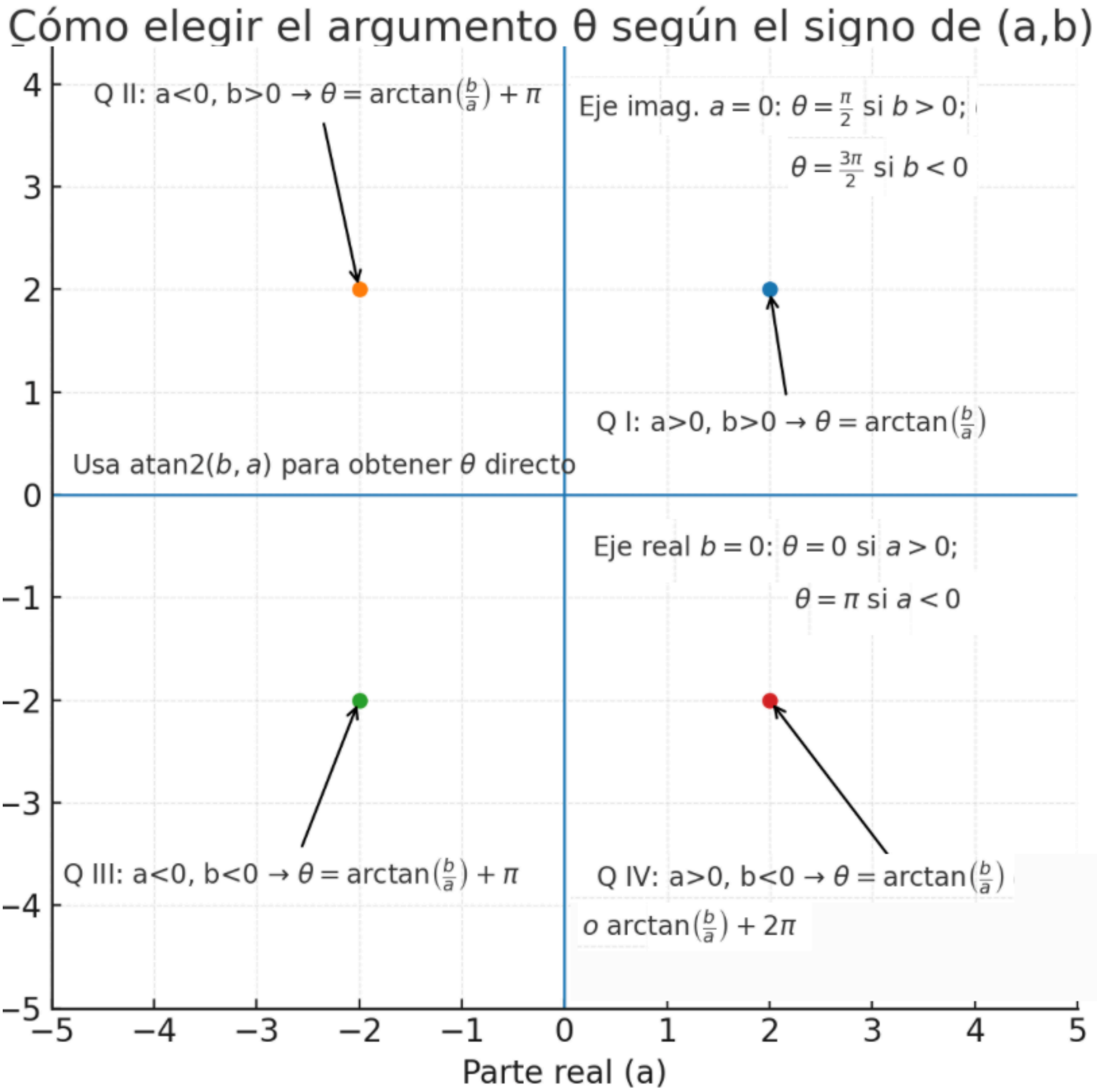


Figura 1.5: Figura 1.5: Conversión de un número complejo de forma rectangular a polar. El punto $z = -2 + 2i$ se ubica en el segundo cuadrante. La figura muestra cómo calcular su módulo $r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ y su argumento $\theta = 3\pi/4$. Así se evidencia la necesidad de ajustar el ángulo según el cuadrante donde se encuentra el complejo.

- $z_1 = 8e^{i\pi/3}$ y $z_2 = 2e^{i\pi/9}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{2}e^{i(\pi/3-\pi/9)} = 4e^{i2\pi/9}$

Potenciación:

- $z = 2e^{i\pi/6}$
- $z^3 = 2^3 e^{i3\pi/6} = 8e^{i\pi/2} = 8i$

Interpretación física: En circuitos eléctricos, $|z|$ representa la magnitud de la impedancia, mientras que el ángulo representa el desfase.

1.5. OPERACIONES Y PROPIEDADES

1.5.1. Potencias y Raíces

Fórmula de De Moivre $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

Ejemplos numéricos:

- $(2e^{i\pi/6})^4 = 2^4 e^{i4\pi/6} = 16e^{i2\pi/3} = 16(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -8 + 8\sqrt{3}i$
- $(1+i)^6$: Primero convertir a polar: $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$
  - $(1+i)^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i6\pi/4} = 8e^{i3\pi/2} = 8(0 - i) = -8i$

Raíces n-ésimas Las n raíces n-ésimas de z = re^{iθ} son:
$z_k = r^{1/n}e^{i(\theta+2\pi k)/n}$, k = 0, 1, 2, …, n-1
Ejemplos numéricos:
Raíces cuadradas de $z = 4e^{i\pi/3}$:
$z_0 = 4^{1/2}e^{i(\pi/3+0)/2} = 2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i$
$z_1 = 4^{1/2}e^{i(\pi/3+2\pi)/2} = 2e^{i7\pi/6} = -\sqrt{3} - i$
Raíces cúbicas de $z = 8e^{i0} = 8$ (raíces cúbicas de 8):
$z_0 = 8^{1/3}e^{i(0+0)/3} = 2e^{i0} = 2$
$z_1 = 8^{1/3}e^{i(0+2\pi)/3} = 2e^{i2\pi/3} = -1 + \sqrt{3}i$
$z_2 = 8^{1/3}e^{i(0+4\pi)/3} = 2e^{i4\pi/3} = -1 - \sqrt{3}i$

1.5.2. Propiedades del Módulo

1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
2. $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ (si $z_2 \neq 0$)
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (desigualdad triangular)
4. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

Ejemplos numéricos de verificación:
Propiedad 1: $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

- $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 1 - 2i$
- $z_1 z_2 = (3 + 4i)(1 - 2i) = 3 - 6i + 4i - 8i^2 = 3 - 2i + 8 = 11 - 2i$
- $|z_1 z_2| = |11 - 2i| = \sqrt{121 + 4} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

- $|z_1||z_2| = |3+4i||1-2i| = 5 \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$ ✓

Propiedad 3: Desigualdad triangular

- $z_1 = 3+4i$, $z_2 = 1+2i$
- $z_1 + z_2 = 4+6i$
- $|z_1+z_2| = |4+6i| = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} \approx 7,21$
- $|z_1| + |z_2| = 5 + \sqrt{5} \approx 5 + 2,24 = 7,24$
- Como $7,21 \leq 7,24$, se cumple la desigualdad ✓

1.6. APLICACIONES INDUSTRIALES

1.6.1. Análisis de Circuitos de Corriente Alterna

En circuitos AC, las impedancias se representan como números complejos:

Elementos básicos:

- Resistencia: $Z_R = R$ (puramente real)
- Inductancia: $Z_L = i\omega L$ (puramente imaginaria positiva)
- Capacitancia: $Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}$ (puramente imaginaria negativa)

Impedancia total: $Z_{total} = Z_R + Z_L + Z_C$

1.6.2. Control de Motores Eléctricos

En el control vectorial de motores, el flujo magnético se representa como un vector complejo:

$$\psi = \psi_d + i\psi_q$$

donde ψ_d y ψ_q son las componentes directa y en cuadratura.

1.6.3. Procesamiento de Señales

La Transformada de Fourier utiliza números complejos para descomponer señales:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$$

1.6.4. Análisis de Vibraciones

En análisis modal, los modos de vibración se representan como números complejos donde:

- El módulo indica la amplitud
- El argumento indica la fase relativa

1.7. EJERCICIOS BÁSICOS FUNDAMENTALES

1.7.1. Ejercicio Básico 1: Operaciones Elementales

Dados $z_1 = 1 + 2i$ y $z_2 = 4 - 2i$, calcular:

a) $z_1 + z_2$
b) $z_1 - z_2$

c) $z_1 \times z_2$
d) z_1/z_2

Solución:

a) $z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (4 - 2i) = (1 + 4) + (2 - 2)i = 5$

b) $z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (4 - 2i) = (1 - 4) + (2 - (-2))i = -3 + 4i$

c) $z_1 \times z_2 = (1+2i)(4-2i) = (1\times4-2\times(-2))+(1\times(-2)+2\times4)i = (4+4)+(-2+8)i = 8+6i$

d) $z_1/z_2 = \frac{1+2i}{4-2i}$ Multiplicamos por el conjugado del denominador: $= \frac{(1+2i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \frac{4+2i+8i+4i^2}{16+4}$ $= \frac{4+10i-4}{20} = \frac{10i}{20} = \frac{i}{2} = 0{,}5i$

1.7.2. Ejercicio Básico 2: Módulo y Conjugado

Dados $z_1 = 3 - 4i$ y $z_2 = -1 + 2i$, calcular:

a) $|z_1|$ y $|z_2|$
b) $\overline{z_1}$ y $\overline{z_2}$
c) $z_1 \times \overline{z_1}$ y $z_2 \times \overline{z_2}$

Solución:

a) $|z_1| = |3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ $|z_2| = |-1 + 2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \approx 2,24$

b) $\bar{z_1} = 3 + 4i$ (cambio de signo en la parte imaginaria) $\bar{z_2} = -1 - 2i$

c) $z_1 \times \bar{z_1} = (3 - 4i)(3 + 4i) = 9 + 12i - 12i - 16i^2 = 9 + 16 = 25 = |z_1|^2$ $z_2 \times \bar{z_2} = (-1 + 2i)(-1 - 2i) = 1 + 2i - 2i - 4i^2 = 1 + 4 = 5 = |z_2|^2$

1.7.3. Ejercicio Básico 3: Conversión Rectangular-Polar

Convertir los siguientes números complejos:

a) $z_1 = 1 + i$ a forma polar
b) $z_2 = 3e^{i120°}$ a forma rectangular

Solución:

a) $z_1 = 1 + i$ $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1,414$ $\theta = \arctan(1/1) = \pi/4$ rad Forma polar: $z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

b) $z_2 = 3e^{i2\pi/3}$ $a = 3\cos(2\pi/3) = 3 \times (-1/2) = -\frac{3}{2}$ $b = 3\sin(2\pi/3) = 3 \times (\sqrt{3}/2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ Forma rectangular: $z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

1.7.4. Ejercicio Básico 4: Potencias y Raíces

Calcular:

a) $(1+i)^4$
b) Las raíces cuadradas de $z = -4$

Solución:

a) $(1+i)^4$ Primero convertir a polar: $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ $(1+i)^4 = (\sqrt{2})^4 e^{i4\pi/4} = 4e^{i\pi} = 4(-1) = -4$

b) Raíces cuadradas de $z = -4 = 4e^{i\pi}$ $z_0 = 4^{1/2}e^{i(\pi+0)/2} = 2e^{i\pi/2} = 2i$ $z_1 = 4^{1/2}e^{i(\pi+2\pi)/2} = 2e^{i3\pi/2} = -2i$

Verificación: $(2i)^2 = 4i^2 = -4$ ✓ $(-2i)^2 = 4i^2 = -4$ ✓

1.7.5. Ejercicio Básico 5: Ecuaciones con Números Complejos

Resolver la ecuación $z^2 + 2z + 5 = 0$
Solución:
Usando la fórmula cuadrática: $z = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ donde $a = 1, b = 2, c = 5$
$z = \frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2} = \frac{-2\pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$
Las soluciones son: $z_1 = -1 + 2i$ y $z_2 = -1 - 2i$
Verificación para $z_1 = -1 + 2i$: $z_1^2 = (-1 + 2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i$ $2z_1 = 2(-1 + 2i) = -2 + 4i$ $z_1^2 + 2z_1 + 5 = (-3 - 4i) + (-2 + 4i) + 5 = 0$ ✓

1.8. EJERCICIOS PRÁCTICOS INDUSTRIALES

1.8.1. Ejercicio 1: Análisis de Impedancia

Un circuito RLC serie tiene:

- R = 10 Ω
- L = 0.02 H
- C = 100 µF
- f = 50 Hz (frecuencia de red)

Calcular: a) La impedancia total Z b) El módulo |Z| y el ángulo de fase φ c) La corriente I si V = $230e^{i0°}$ V

Solución:
$\omega = 2\pi f = 2\pi(50) = 314,16$ rad/s
$Z_L = i\omega L = i(314,16)(0,02) = 6,28i$ $Z_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{i(314,16)(100\times10^{-6})} = -31,83i$
$Z = R + Z_L + Z_C = 10 + 6,28i - 31,83i = 10 - 25,55i$
$|Z| = \sqrt{10^2 + (-25,55)^2} = 27,44$ $\varphi = \arctan(-25,55/10) = -68,6° = -1,197$ rad
$I = \frac{V}{Z} = \frac{230e^{i0}}{27,44e^{-i1,197}} = 8{,}38e^{i1,197}$ A

1.8.2. Ejercicio 2: Control de Motor Trifásico

Un motor trifásico opera con:

- Voltaje de línea: 400 V
- Corriente de línea: 20 A
- Factor de potencia: 0.85 (inductivo)

Calcular la potencia compleja S = P + iQ
Solución:
$\varphi = \arccos(0,85) = 31,79° = 0,555$ rad $S = \sqrt{3} \times V_L \times I_L \times e^{i\varphi}$ $S = \sqrt{3} \times 400 \times 20 \times e^{i0,555}$ $S = 13856 \times (0,85 + 0,527i) = 11777 + 7302i$ VA $P = 11777$ W (potencia activa) $Q = 7302$ VAR (potencia reactiva)

1.8.3. Ejercicio 3: Análisis de Vibración

Una máquina tiene dos modos de vibración:

- Modo 1: $A_1 = 5$ mm, $\phi_1 = 30°$
- Modo 2: $A_2 = 3$ mm, $\phi_2 = -45°$

Expresar como números complejos y calcular la respuesta total
Solución:
$z_1 = 5e^{i\pi/6} = 5(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)) = 4{,}33 + 2{,}5i$ mm $z_2 = 3e^{-i\pi/4} = 3(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)) = 2{,}12 - 2{,}12i$ mm
$z_{total} = z_1 + z_2 = (4,33 + 2,12) + (2,5 - 2,12)i = 6,45 + 0,38i$ mm
$|z_{total}| = \sqrt{6,45^2 + 0,38^2} = 6,46$ mm $\varphi_{total} = \arctan(0,38/6,45) = 3,4° = 0,059$ rad

1.9. CASOS DE ESTUDIO INDUSTRIAL

1.9.1. Caso 1: Optimización de Factor de Potencia en Fábrica

Problema: Una fábrica tiene un factor de potencia de 0.7 inductivo. ¿Qué capacidad de condensadores se necesita para mejorarlo a 0.95?
Datos:

- Potencia activa: P = 500 kW
- Voltaje: 400 V trifásico
- Factor de potencia inicial: $\cos\varphi_1 = 0,7$
- Factor de potencia deseado: $\cos\varphi_2 = 0,95$

Análisis usando números complejos:
Estado inicial:
$\varphi_1 = \arccos(0,7) = 45,57°$ $Q_1 = P \times \tan(\varphi_1) = 500 \times \tan(45,57°) = 510,2$ kVAR $S_1 = P + iQ_1 = 500 + 510{,}2i$ kVA
Estado deseado:

$\varphi_2 = \arccos(0,95) = 18,19°$ $Q_2 = P \times \tan(\varphi_2) = 500 \times \tan(18,19°) = 164,3$ kVAR $S_2 = P + iQ_2 = 500 + 164{,}3i$ kVA

Potencia reactiva del condensador:

$Q_C = Q_1 - Q_2 = 510,2 - 164,3 = 345,9$ kVAR

Capacidad requerida:

$C = \frac{Q_C}{\omega \times V^2} = \frac{345900}{314{,}16 \times 400^2} = 6,9$ mF

1.9.2. Caso 2: Análisis de Armónicos en Red Industrial

Problema: Una red industrial presenta distorsión armónica. Analizar los componentes utilizando representación compleja.

Mediciones:

- Fundamental (50 Hz): $230e^{i0°}$ V
- 3ª armónica (150 Hz): $23e^{i180°}$ V
- 5ª armónica (250 Hz): $11{,}5e^{i90°}$ V

Análisis:

$V_1 = 230 + 0i$ V $V_3 = 23e^{i\pi} = -23 + 0i$ V $V_5 = 11{,}5e^{i\pi/2} = 0 + 11{,}5i$ V

$V_{total}(t) = \text{Re}[(V_1 e^{i\omega t} + V_3 e^{i3\omega t} + V_5 e^{i5\omega t})]$

THD (Distorsión armónica total):

THD $= \frac{\sqrt{|V_3|^2 + |V_5|^2}}{|V_1|} \times 100\,\%$ THD $= \frac{\sqrt{23^2 + 11{,}5^2}}{230} \times 100\,\% = 11,2\,\%$

1.9.3. Caso 3: Diseño de Filtro Activo

Problema: Diseñar un filtro activo para eliminar la 5ª armónica del caso anterior.

Estrategia: El filtro debe generar una corriente igual y opuesta a la componente armónica.

Solución: Si la impedancia del sistema a 250 Hz es $Z_5 = 2 + 3i$:

$I_{5\_perturbadora} = \frac{V_5}{Z_5} = \frac{0 + 11{,}5i}{2 + 3i}$

Multiplicando por el conjugado: $I_5 = \frac{(11{,}5i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{23i + 34{,}5}{4+9} = 2,65 + 1,77i$ A

El filtro debe inyectar: $I_{5\_filtro} = -I_5 = -2,65 - 1,77i$ A

1.10. CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS

Los números complejos son herramientas fundamentales en la ingeniería moderna. Su elegancia matemática se traduce en soluciones prácticas para problemas industriales complejos:

1. **Simplificación de cálculos:** Operaciones que serían tediosas con trigonometría se vuelven algebraicas
2. **Unificación de conceptos:** Magnitud y fase se manejan simultáneamente
3. **Análisis frecuencial:** Base para la teoría de filtros y control automático
4. **Modelado de sistemas:** Desde circuitos hasta sistemas mecánicos

Próximos pasos: En cursos posteriores, estos conceptos se extenderán hacia:

- Funciones de variable compleja (análisis complejo)
- Transformadas de Laplace y Z

- Teoría de control en el dominio frecuencial
- Análisis de sistemas dinámicos

“La matemática es el alfabeto con el cual Dios ha escrito el universo” - Galileo Galilei
En la industria moderna, los números complejos son parte fundamental de ese alfabeto.

2. CAPÍTULO 2 INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

2.1. INTRODUCCIÓN: LAS MATRICES EN LA INDUSTRIA

En el mundo industrial moderno, las matrices no son simplemente arreglos de números, sino herramientas fundamentales para modelar, analizar y resolver problemas complejos. Desde la planificación de la producción hasta el control de calidad, pasando por el análisis de redes y la optimización de recursos, las matrices proporcionan un lenguaje matemático elegante y poderoso.

2.1.1. ¿Por qué necesitamos matrices en la industria?

Ejemplo de aplicación: Una empresa automotriz tiene 3 plantas que producen 4 tipos diferentes de vehículos. La información de producción mensual se puede representar como:

Plantas → P1, P2, P3

Vehículos → Sedan, SUV, Pickup, Híbrido

Una matriz 3×4 puede representar toda esta información de manera compacta, facilitando cálculos de costos, planificación y análisis de eficiencia.

2.2. CONCEPTO Y NOTACIÓN DE MATRICES

2.2.1. Definición de Matriz

Una matriz es un arreglo rectangular de números (reales o complejos) dispuestos en filas (horizontales) y columnas (verticales).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde:

- a_{ij} representa el elemento en la fila i y columna j
- m es el número de filas
- n es el número de columnas
- Se denota como $A \in M_{m,n}$

Ejemplos numéricos:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Para esta matriz:

- $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = -1$
- $a_{21} = 4$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = 5$
- Orden: 2×3 (2 filas, 3 columnas)

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Para esta matriz:

- $b_{11} = 1$, $b_{21} = -2$, $b_{31} = 3$
- Orden: 3×1 (vector columna)

$C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Para esta matriz:

- $c_{11} = 5$, $c_{12} = -1$, $c_{13} = 2$, $c_{14} = 0$
- Orden: 1×4 (vector fila)

2.2.2. Notación Industrial

En aplicaciones industriales, las matrices suelen representar:

- **Matriz de producción:** Filas = plantas, columnas = productos
- **Matriz de costos:** Filas = materias primas, columnas = productos
- **Matriz de rutas:** Filas = origen, columnas = destino

Ejemplo industrial: Una fábrica textil produce 3 tipos de telas en 2 turnos:

$P = \begin{pmatrix} 120 & 80 & 150 \\ 100 & 95 & 130 \end{pmatrix}$

donde las filas representan turnos (mañana, tarde) y las columnas representan tipos de tela (algodón, poliéster, mezcla).

2.3. OPERACIONES BÁSICAS CON MATRICES

2.3.1. Igualdad de Matrices

Dos matrices A y B son iguales si tienen el mismo orden y $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, j.

Ejemplos numéricos:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A = B$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow C \neq D$

2.3.2. Suma y Resta de Matrices

Solo se pueden sumar/restar matrices del mismo orden.
$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
$(A-B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$
Ejemplos numéricos:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$
$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$
$A - B = \begin{pmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

2.3.3. Multiplicación por un Escalar

$(kA)_{ij} = k \cdot a_{ij}$
Ejemplos numéricos:
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, k = 3$
$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, k = -0,5$ $-0{,}5A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

2.3.4. Multiplicación de Matrices

Para multiplicar $A_{m\times r} \times B_{r\times n}$, el número de columnas de A debe igual al número de filas de B.
$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$
Ejemplos numéricos paso a paso:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$
Calculamos AB:
$(AB)_{11} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 5 + 14 = 19$
$(AB)_{12} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 6 + 16 = 22$
$(AB)_{21} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 15 + 28 = 43$
$(AB)_{22} = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 = 18 + 32 = 50$
Por tanto: $AB = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$
Ejemplo con dimensiones diferentes:
$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$
Calculamos CD (2×3 por 3×2 = 2×2):
$(CD)_{11} = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 = 7 + 18 + 33 = 58$
$(CD)_{12} = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 = 8 + 20 + 36 = 64$
$(CD)_{21} = 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 = 28 + 45 + 66 = 139$

$(CD)_{22} = 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 = 32 + 50 + 72 = 154$

Por tanto: $CD = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix}$

2.3.5. Propiedades de las Operaciones

1. **Conmutatividad de la suma:** $A + B = B + A$
2. **Asociatividad de la suma:** $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. **Asociatividad del producto:** $(AB)C = A(BC)$
4. **Distributividad:** $A(B + C) = AB + AC$
5. **NO conmutatividad del producto:** En general $AB \neq BA$

Ejemplo de no conmutatividad:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Claramente $AB \neq BA$

2.4. TIPOS ESPECIALES DE MATRICES

2.4.1. Matriz Cuadrada

Una matriz es cuadrada si $m = n$ (mismo número de filas y columnas).

Ejemplos numéricos:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (2×2)

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (3×3)

2.4.2. Matriz Identidad

La matriz identidad I_n es una matriz cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en el resto.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplos numéricos:

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Propiedad fundamental: $AI_n = I_nA = A$ para cualquier matriz compatible.

2.4.3. Matriz Cero

La matriz cero $O_{m,n}$ tiene todos sus elementos iguales a cero.
Ejemplos numéricos:
$O_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$O_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.4.4. Matriz Diagonal

Una matriz cuadrada donde $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.
Ejemplos numéricos:
$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
Se denota: $D = \text{diag}(3, -2, 5)$

2.4.5. Matriz Triangular Superior

Una matriz cuadrada donde $a_{ij} = 0$ para $i > j$.
Ejemplos numéricos:
$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

2.4.6. Matriz Triangular Inferior

Una matriz cuadrada donde $a_{ij} = 0$ para $i < j$.
Ejemplos numéricos:
$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

2.4.7. Matriz Simétrica

Una matriz cuadrada donde $A^T = A$ (es decir, $a_{ij} = a_{ji}$).
Ejemplos numéricos:
$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
Verificación: $s_{12} = 2 = s_{21}$, $s_{13} = 3 = s_{31}$, $s_{23} = 5 = s_{32}$ ✓

2.4.8. Matriz Transpuesta

La transpuesta de A, denotada A^T, se obtiene intercambiando filas por columnas.
$(A^T)_{ij} = a_{ji}$
Ejemplos numéricos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5. INTRODUCCIÓN A LOS DETERMINANTES

2.5.1. Determinante de una Matriz 2×2

Para una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$\det(A) = |A| = ad - bc$

Ejemplos numéricos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 12 - 2 = 10$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = (-1) \cdot 3 - 5 \cdot 2 = -3 - 10 = -13$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

2.5.2. Determinante de una Matriz 3×3

Para una matriz 3×3, usamos expansión por cofactores:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplos numéricos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7)$$

$$= 1(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35)$$

$$= 1(-3) - 2(-6) + 3(-3) = -3 + 12 - 9 = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|B| = 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4 \cdot 0 - 1 \cdot 2) - 1(0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + 3(0 \cdot 2 - 4 \cdot 1)$$

$= 2(-2) - 1(-1) + 3(-4) = -4 + 1 - 12 = -15$

2.5.3. Propiedades de los Determinantes

1. $|A^T| = |A|$
2. $|AB| = |A||B|$
3. $|kA| = k^n|A|$ para matriz $n \times n$
4. Si una fila es múltiplo de otra, entonces $|A| = 0$
5. Intercambiar dos filas cambia el signo del determinante

Ejemplos de verificación:
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, k = 3$
$|A| = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 8 - 3 = 5$
$3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$
$|3A| = 6 \cdot 12 - 3 \cdot 9 = 72 - 27 = 45 = 3^2 \cdot 5 = 9 \cdot 5$ ✓

2.6. MATRICES ELEMENTALES Y OPERACIONES POR FILAS

2.6.1. Operaciones Elementales por Filas

Las operaciones elementales por filas son transformaciones básicas que se pueden aplicar a las filas de una matriz sin alterar la información esencial del sistema que representa.

Tipos de operaciones elementales:

1. **Intercambio de filas:** $R_i \leftrightarrow R_j$
2. **Multiplicación de una fila por un escalar no nulo:** $R_i \leftarrow kR_i$ (donde $k \neq 0$)
3. **Suma de un múltiplo de una fila a otra fila:** $R_i \leftarrow R_i + kR_j$

Ejemplos numéricos:

Matriz original: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Operación 1: Intercambiar R_1 y R_3: $A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Operación 2: Multiplicar R_2 por -2: $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -8 & -10 & -12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Operación 3: Sumar $-3R_1$ a R_3: $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

2.6.2. Matrices Elementales

Una matriz elemental es una matriz identidad que ha sido modificada mediante una sola operación elemental por filas.

Tipos de matrices elementales:

1. Matriz de intercambio P_{ij}: Intercambia las filas i y j de la matriz identidad.

$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (para matrices 3×3)

2. Matriz de escalamiento $S_i(k)$: Multiplica la fila i por el escalar $k \neq 0$.

$S_2(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Matriz de transvección $T_{ij}(k)$: Suma k veces la fila j a la fila i.

$T_{31}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.6.3. Propiedades de las Matrices Elementales

1. **Toda matriz elemental es invertible** significa que existe otra matriz elemental que multiplicando la primera da como resultado la matriz identidad. Más adelante formalizaremos el concepto de **matriz inversa**.
2. **La inversa de una matriz elemental es también elemental del mismo tipo**
3. **El producto de matrices elementales es invertible**

Ejemplos de inversas:

$P_{12}^{-1} = P_{12}$ (la matriz de intercambio es su propia inversa)

$S_i(k)^{-1} = S_i(\frac{1}{k})$

$T_{ij}(k)^{-1} = T_{ij}(-k)$

2.6.4. Forma Escalonada por Filas

Una matriz está en forma escalonada por filas si:

1. Todas las filas de ceros están en la parte inferior
2. El primer elemento no nulo de cada fila (llamado pivote) está a la derecha del pivote de la fila anterior
3. Todos los elementos debajo de cada pivote son cero

Ejemplo de forma escalonada:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.6.5. Algoritmo de Eliminación de Gauss (Introducción)

El método de eliminación de Gauss utiliza operaciones elementales por filas para transformar una matriz a forma escalonada.

Ejemplo paso a paso:

Transformar $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ a forma escalonada

Paso 1: $R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

Paso 2: $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Paso 3: $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2.6.6. Aplicación Industrial: Balanceo de Ecuaciones Químicas

Las operaciones por filas son fundamentales para resolver sistemas de ecuaciones que aparecen en procesos industriales.

Ejemplo: Balanceo de la reacción de combustión del metano: $aCH_4 + bO_2 \rightarrow cCO_2 + dH_2O$

Esto genera el sistema de ecuaciones:

- C: $a = c$
- H: $4a = 2d$
- O: $2b = 2c + d$

2.7. APLICACIONES INDUSTRIALES

2.7.1. Planificación de la Producción

Las matrices permiten modelar sistemas de producción complejos con múltiples plantas, productos y recursos.

Ejemplo: Una empresa produce 3 productos en 2 plantas:

Matriz de producción semanal: $P = \begin{pmatrix} 100 & 150 & 80 \\ 120 & 130 & 90 \end{pmatrix}$

donde las filas representan plantas y las columnas productos.

Matriz de costos unitarios: $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 35 \end{pmatrix}$

Costo total por planta:

$$PC = \begin{pmatrix} 100 & 150 & 80 \\ 120 & 130 & 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10300 \\ 12050 \end{pmatrix}$$

2.7.2. Análisis de Redes de Distribución

Las matrices representan conexiones y flujos en redes logísticas.

Ejemplo: Red de distribución con 3 centros y 4 destinos:

Matriz de capacidades (toneladas/día): $R = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 30 & 20 \\ 40 & 60 & 0 & 35 \\ 0 & 45 & 25 & 40 \end{pmatrix}$

Costos de transporte (\$/tonelada): $T = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 15 & 18 \\ 14 & 11 & 0 & 16 \\ 0 & 13 & 17 & 12 \end{pmatrix}$

2.7.3. Control de Inventarios

Matrices para gestionar inventarios multi-producto y multi-almacén.
Ejemplo: Sistema de inventarios con 4 productos en 3 almacenes:

Inventario inicial: $I_0 = \begin{pmatrix} 200 & 150 & 300 & 100 \\ 180 & 200 & 250 & 120 \\ 220 & 180 & 280 & 90 \end{pmatrix}$

Demanda mensual: $D = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 80 & 30 \\ 45 & 50 & 70 & 35 \\ 55 & 45 & 75 & 25 \end{pmatrix}$

Inventario final: $I_f = I_0 - D$

2.7.4. Análisis de Calidad

Matrices de correlación para análisis de defectos y factores de calidad.
Ejemplo: Análisis de 5 factores de calidad en 3 líneas de producción:

Matriz de datos de calidad (puntuaciones 1-10): $Q = \begin{pmatrix} 8,5 & 7,2 & 9,1 & 8,0 & 7,8 \\ 7,9 & 8,1 & 8,5 & 7,5 & 8,2 \\ 8,2 & 7,8 & 8,8 & 8,3 & 7,9 \end{pmatrix}$

2.8. EJERCICIOS BÁSICOS FUNDAMENTALES

2.8.1. Ejercicio Básico 1: Operaciones Elementales

Dadas las matrices:
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
Calcular:

a) $A + B$ b) $2A - 3B$ c) AB d) BA e) $(A + B)C$

Solución:

a) $A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & -1+2 \\ 3+(-1) & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

b) $2A - 3B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$

c) $AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 18 \end{pmatrix}$

d) $BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \\ (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 3 & (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$

e) $(A+B)C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 14 & -5 \end{pmatrix}$

2.8.2. Ejercicio Básico 2: Propiedades de Matrices

Verificar que $AB \neq BA$ en general usando:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Solución:
$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
Como $AB \neq BA$, queda verificado que el producto matricial no es conmutativo.

2.8.3. Ejercicio Básico 3: Determinantes

Calcular los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 12 - 2 = 10$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2(3 \cdot 1 - 2 \cdot 1) - 1(1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) + 0$
$= 2(3 - 2) - 1(1 - 0) = 2(1) - 1(1) = 2 - 1 = 1$

2.8.4. Ejercicio Básico 4: Transpuesta y Simetría

Dada la matriz:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcular A^T

b) Verificar si A es simétrica

c) Calcular $A + A^T$

d) ¿Es $A + A^T$ simétrica?

Solución:

a) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A \neq A^T$ porque, por ejemplo, $a_{12} = 3 \neq 4 = a_{21}$. Por tanto, A no es simétrica.

c) $A + A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 7 & 0 & 7 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

d) Sí, $A + A^T$ es simétrica porque $(A + A^T)^T = A^T + A = A + A^T$.

2.8.5. Ejercicio Básico 5: Matrices Especiales

Identificar el tipo de cada matriz:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Solución:

a) Matriz diagonal: diag$(3, -2, 5)$

b) Matriz triangular superior

c) Matriz simétrica (verificar: $a_{12} = a_{21} = 1$, $a_{13} = a_{31} = 4$, $a_{23} = a_{32} = 2$)

2.9. EJERCICIOS PRÁCTICOS INDUSTRIALES

2.9.1. Ejercicio 1: Planificación de Producción

Una empresa automotriz tiene 3 plantas que producen 4 tipos de vehículos. La producción mensual (en unidades) se representa por:

$$P = \begin{pmatrix} 120 & 80 & 150 & 60 \\ 100 & 95 & 130 & 70 \\ 110 & 90 & 140 & 65 \end{pmatrix}$$

Los costos de producción unitarios (en miles de \$) son:

$$C = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 22 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) El costo total de producción por planta

b) El costo total de la empresa

c) Si la demanda aumenta 20 %, ¿cuál será la nueva matriz de producción?

Solución:

a) Costo total por planta = PC:

$$PC = \begin{pmatrix} 120 & 80 & 150 & 60 \\ 100 & 95 & 130 & 70 \\ 110 & 90 & 140 & 65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 22 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Planta 1: $120(25) + 80(30) + 150(22) + 60(35) = 3000 + 2400 + 3300 + 2100 = 10800$

Planta 2: $100(25) + 95(30) + 130(22) + 70(35) = 2500 + 2850 + 2860 + 2450 = 10660$

Planta 3: $110(25) + 90(30) + 140(22) + 65(35) = 2750 + 2700 + 3080 + 2275 = 10805$

$$PC = \begin{pmatrix} 10800 \\ 10660 \\ 10805 \end{pmatrix} \text{ (miles de \$)}$$

b) Costo total = $10800 + 10660 + 10805 = 32265$ miles de \$ = \$32,265,000

c) Nueva matriz de producción = $1{,}2P$:

$$P_{nuevo} = 1,2 \begin{pmatrix} 120 & 80 & 150 & 60 \\ 100 & 95 & 130 & 70 \\ 110 & 90 & 140 & 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 & 96 & 180 & 72 \\ 120 & 114 & 156 & 84 \\ 132 & 108 & 168 & 78 \end{pmatrix}$$

2.9.2. Ejercicio 2: Análisis de Red de Distribución

Una empresa de logística tiene 3 centros de distribución que abastecen a 4 ciudades. La matriz de capacidades diarias (toneladas) es:

$$R = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 0 & 30 \\ 35 & 0 & 45 & 25 \\ 0 & 50 & 35 & 40 \end{pmatrix}$$

Los costos de transporte (\$/tonelada) son:

$$T = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 0 & 18 \\ 14 & 0 & 11 & 16 \\ 0 & 13 & 17 & 12 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) El costo diario total si se opera a máxima capacidad

b) La capacidad total de cada centro

c) La demanda total que puede satisfacer cada ciudad

Solución:

a) Costo diario total = suma de $R_{ij} \times T_{ij}$ para rutas activas:

Centro 1: $50 \times 12 + 40 \times 15 + 30 \times 18 = 600 + 600 + 540 = 1740$
Centro 2: $35 \times 14 + 45 \times 11 + 25 \times 16 = 490 + 495 + 400 = 1385$
Centro 3: $50 \times 13 + 35 \times 17 + 40 \times 12 = 650 + 595 + 480 = 1725$
Costo total diario = 1740 + 1385 + 1725 = 4850$ $/día

b) Capacidad total por centro (suma por filas):

Centro 1: $50 + 40 + 0 + 30 = 120$ toneladas/día
Centro 2: $35 + 0 + 45 + 25 = 105$ toneladas/día
Centro 3: $0 + 50 + 35 + 40 = 125$ toneladas/día

c) Demanda total por ciudad (suma por columnas):

Ciudad 1: $50 + 35 + 0 = 85$ toneladas/día
Ciudad 2: $40 + 0 + 50 = 90$ toneladas/día
Ciudad 3: $0 + 45 + 35 = 80$ toneladas/día
Ciudad 4: $30 + 25 + 40 = 95$ toneladas/día

2.9.3. Ejercicio 3: Control de Inventarios

Un almacén gestiona 3 productos con el siguiente inventario inicial (unidades):
$I_0 = \begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 \end{pmatrix}$
Durante la semana se realizaron las siguientes operaciones:
Lunes: Ventas = $\begin{pmatrix} 50 & 30 & 25 \end{pmatrix}$, Compras = $\begin{pmatrix} 100 & 0 & 50 \end{pmatrix}$
Miércoles: Ventas = $\begin{pmatrix} 40 & 25 & 20 \end{pmatrix}$, Compras = $\begin{pmatrix} 0 & 80 & 30 \end{pmatrix}$
Viernes: Ventas = $\begin{pmatrix} 35 & 20 & 15 \end{pmatrix}$, Compras = $\begin{pmatrix} 75 & 40 & 0 \end{pmatrix}$
Calcular el inventario final de la semana.
Solución:
Inventario final = Inventario inicial + Total compras - Total ventas
Total compras = $\begin{pmatrix} 100 & 0 & 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 80 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 75 & 40 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 175 & 120 & 80 \end{pmatrix}$
Total ventas = $\begin{pmatrix} 50 & 30 & 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 & 25 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 & 20 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 75 & 60 \end{pmatrix}$
$I_f = \begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 175 & 120 & 80 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 125 & 75 & 60 \end{pmatrix}$
$I_f = \begin{pmatrix} 550 & 345 & 220 \end{pmatrix}$ unidades

2.10. CASOS DE ESTUDIO INDUSTRIAL

2.10.1. Caso 1: Optimización de Líneas de Producción

Problema: Una fábrica de electrodomésticos tiene 4 líneas de producción que fabrican 5 tipos de productos. Se requiere analizar la eficiencia y balancear la carga de trabajo.

Datos:
Matriz de producción actual (unidades/hora):
$$P = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 15 & 6 & 10 \\ 10 & 12 & 10 & 8 & 12 \\ 15 & 6 & 20 & 4 & 8 \\ 8 & 10 & 12 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$
Matriz de costos operativos (\$/hora):
$$C = \begin{pmatrix} 450 \\ 520 \\ 480 \\ 510 \end{pmatrix}$$
Matriz de precios de venta:
$$V = \begin{pmatrix} 25 & 35 & 20 & 45 & 30 \end{pmatrix}$$
Análisis:
1. Ingresos por línea de producción:
Ingresos $= P \times V^T$
Línea 1: $12(25) + 8(35) + 15(20) + 6(45) + 10(30) = 300 + 280 + 300 + 270 + 300 = 1450$ \$/hora
Línea 2: $10(25) + 12(35) + 10(20) + 8(45) + 12(30) = 250 + 420 + 200 + 360 + 360 = 1590$ \$/hora
Línea 3: $15(25) + 6(35) + 20(20) + 4(45) + 8(30) = 375 + 210 + 400 + 180 + 240 = 1405$ \$/hora
Línea 4: $8(25) + 10(35) + 12(20) + 10(45) + 15(30) = 200 + 350 + 240 + 450 + 450 = 1690$ \$/hora
2. Beneficio neto por línea:
Línea 1: $1450 - 450 = 1000$ \$/hora
Línea 2: $1590 - 520 = 1070$ \$/hora
Línea 3: $1405 - 480 = 925$ \$/hora
Línea 4: $1690 - 510 = 1180$ \$/hora
3. Recomendaciones:

- La línea 4 es la más rentable (\$1180/hora)
- La línea 3 requiere optimización (menor rentabilidad)
- Considerar redistribuir productos entre líneas

2.10.2. Caso 2: Análisis de Cadena de Suministro

Problema: Una empresa multinacional gestiona una cadena de suministro con 3 proveedores, 2 plantas de manufactura y 4 centros de distribución.
Datos:
Capacidades de proveedores (toneladas/mes):
$$S = \begin{pmatrix} 500 & 300 \\ 400 & 250 \\ 600 & 350 \end{pmatrix}$$
Capacidades de plantas (toneladas/mes):
$$M = \begin{pmatrix} 800 & 650 & 750 & 700 \\ 600 & 550 & 600 & 650 \end{pmatrix}$$
Costos de transporte proveedor-planta (\$/tonelada):

$T_1 = \begin{pmatrix} 50 & 60 \\ 45 & 55 \\ 40 & 50 \end{pmatrix}$

Costos de transporte planta-centro ($/tonelada):

$T_2 = \begin{pmatrix} 30 & 35 & 40 & 25 \\ 28 & 32 & 38 & 30 \end{pmatrix}$

Análisis:

1. Capacidad total del sistema:

- Proveedores: $(500 + 300) + (400 + 250) + (600 + 350) = 2400$ toneladas/mes
- Plantas: $(800 + 650 + 750 + 700) + (600 + 550 + 600 + 650) = 5400$ toneladas/mes

2. Costo mínimo proveedor-planta:

- Proveedor 1 → Planta 1: 500×50 + 300×60 = $43,000
- Proveedor 2 → Planta 1: 400×45 + 250×55 = $31,750
- Proveedor 3 → Planta 1: 600×40 + 350×50 = $41,500

3. Optimización: Seleccionar rutas de menor costo manteniendo restricciones de capacidad.

2.10.3. Caso 3: Análisis de Calidad Multi-producto

Problema: Una empresa química produce 6 productos en 3 plantas. Se requiere analizar la correlación entre variables de calidad.

Datos:

Matriz de puntuaciones de calidad (escala 1-10):

$Q = \begin{pmatrix} 8,5 & 7,2 & 9,1 & 8,0 & 7,8 & 8,3 \\ 7,9 & 8,1 & 8,5 & 7,5 & 8,2 & 7,7 \\ 8,2 & 7,8 & 8,8 & 8,3 & 7,9 & 8,1 \end{pmatrix}$

Pesos de importancia por producto:

$W = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,20 \\ 0,18 \\ 0,12 \\ 0,25 \\ 0,10 \end{pmatrix}$

Análisis:

1. Índice de calidad ponderado por planta:

$IQ = Q \times W$

Planta 1: $8,5(0,15) + 7,2(0,20) + 9,1(0,18) + 8,0(0,12) + 7,8(0,25) + 8,3(0,10) = 8,056$

Planta 2: $7,9(0,15) + 8,1(0,20) + 8,5(0,18) + 7,5(0,12) + 8,2(0,25) + 7,7(0,10) = 8,065$

Planta 3: $8,2(0,15) + 7,8(0,20) + 8,8(0,18) + 8,3(0,12) + 7,9(0,25) + 8,1(0,10) = 8,117$

2. Ranking de calidad:

1. Planta 3: 8.117
2. Planta 2: 8.065
3. Planta 1: 8.056

3. Estrategias de mejora:

- Planta 1: Mejorar producto 2 (puntuación 7.2)
- Planta 2: Mejorar producto 4 (puntuación 7.5)
- Todas: Mantener estándares del producto 3

2.11. CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS

El álgebra lineal, y en particular las matrices, constituyen herramientas fundamentales en la ingeniería moderna. Su elegancia matemática se traduce en soluciones prácticas para problemas industriales complejos:

1. **Simplificación de cálculos:** Operaciones que serían tediosas con métodos tradicionales se vuelven sistemáticas
2. **Representación compacta:** Grandes volúmenes de datos se organizan eficientemente
3. **Análisis sistemático:** Problemas multi-dimensionales se abordan con metodología clara
4. **Optimización:** Base para algoritmos de optimización industrial

Próximos pasos: En cursos posteriores, estos conceptos se extenderán hacia:

- Sistemas de ecuaciones lineales y métodos de solución
- Espacios vectoriales y transformaciones lineales
- Valores y vectores propios
- Aplicaciones en control automático y procesamiento de señales

“En la industria moderna, las matrices son el lenguaje que permite traducir problemas complejos en soluciones sistemáticas.”

Las matrices transforman la complejidad industrial en claridad matemática, proporcionando las herramientas necesarias para la toma de decisiones basada en datos.

3. SISTEMAS DE ECUACIONES Y DETERMINANTES

3.1. INTRODUCCIÓN: SISTEMAS LINEALES EN LA INDUSTRIA

En el mundo industrial moderno, los sistemas de ecuaciones lineales son herramientas fundamentales para modelar y resolver problemas complejos. Desde la planificación de la producción hasta el análisis de redes eléctricas, pasando por el control de calidad y la optimización de recursos, estos sistemas proporcionan un marco matemático robusto para la toma de decisiones.

3.1.1. ¿Por qué necesitamos sistemas lineales en la industria?

Ejemplo de aplicación: En una fábrica de productos químicos, la mezcla de tres componentes A, B y C debe satisfacer simultáneamente:

- Restricciones de concentración
- Límites de costo total
- Especificaciones de calidad

Esto genera un sistema de ecuaciones lineales donde cada ecuación representa una restricción del proceso industrial.

3.2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: DEFINICIÓN Y NOTACIÓN

3.2.1. Definición General

Un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas tiene la forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

donde:

- a_{ij} son los coeficientes del sistema
- b_i son los términos independientes
- x_j son las incógnitas del sistema

3.2.2. Notación Matricial

El sistema puede escribirse como $Ax = b$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ejemplos numéricos:

Ejemplo 1: Sistema 2×3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Expandido:

- $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$
- $-2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2$

Una solución es $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Verificación: $(1)(2) + (2)(0) + (3)(1) = 2 + 0 + 3 = 5$ ✓
$(-2)(2) + (2)(0) + (2)(1) = -4 + 0 + 2 = -2$ ✓

3.2.3. Matriz Ampliada

La matriz ampliada $[A \mid b]$ se obtiene añadiendo la columna b a la matriz A:

$$[A \mid b] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \mid & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \mid & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mid & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \mid & b_m \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Para el sistema anterior: $[A \mid b] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mid & 5 \\ -2 & 2 & 2 & \mid & -2 \end{pmatrix}$

3.3. MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS

3.3.1. Operaciones Elementales de Fila

Las operaciones elementales son:

1. **Multiplicación por escalar:** $f_i(r)$ - Multiplicar la fila i por $r \neq 0$
2. **Intercambio de filas:** f_{ij} - Intercambiar las filas i y j
3. **Suma de filas:** $f_{ij}(r)$ - Sumar a la fila i la fila j multiplicada por r

3.3.2. Forma Escalonada

Una matriz está en forma escalonada si:

- Todas las filas nulas están en la parte inferior
- El primer elemento no nulo de cada fila (pivote) está a la derecha del pivote de la fila anterior
- Todos los elementos bajo cada pivote son cero

Ejemplos numéricos:

Ejemplo 1: Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Paso 1: Formar la matriz ampliada $[A \mid b] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 3 & 5 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$

Paso 2: Aplicar $f_{21}(-3)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & -2 & | & -10 \end{pmatrix}$

Paso 3: Identificar variable libre: $x_3 = t$

Paso 4: Resolver por sustitución hacia atrás: $-x_2 - 2t = -10 \Rightarrow x_2 = 10 - 2t$

$x_1 + 2(10 - 2t) + t = 3 \Rightarrow x_1 = -17 + 3t$

Solución general: $x = \begin{pmatrix} -17 + 3t \\ 10 - 2t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

Ejemplo 2: Sistema con solución única $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aplicando eliminación de Gauss:

$[A \mid b] = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 3 & -5 & 1 & | & -14 \\ -4 & 7 & 5 & | & 0 \end{pmatrix}$

$f_{21}(3), f_{31}(-4)$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 4 & | & -11 \\ 0 & -1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix}$

$f_{32}(1)$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 4 & | & -11 \\ 0 & 0 & 5 & | & -15 \end{pmatrix}$

Solución por sustitución: $x_3 = \frac{-15}{5} = -3$

$x_2 = -11 - 4(-3) = 1$

$x_1 = 1 - 2(1) - (-3) = 2$

Solución única: $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

3.4. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS SISTEMAS

3.4.1. Sistemas en el Plano (2 ecuaciones, 2 incógnitas)

Cada ecuación lineal $ax + by = c$ representa una recta en el plano cartesiano. Un sistema de dos ecuaciones lineales representa la intersección de dos rectas.

Casos posibles:

3.4.2. Caso 1: Solución Única (Rectas Secantes)

Las rectas se cortan en un punto único.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Interpretación geométrica:

- Recta 1: $y = 3 - x$ (pendiente = -1, ordenada = 3)
- Recta 2: $y = x - 1$ (pendiente = 1, ordenada = -1)

Las rectas se intersectan en $(2, 1)$.

3.4.3. Caso 2: Infinitas Soluciones (Rectas Coincidentes)

Las ecuaciones representan la misma recta.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$$

Interpretación geométrica:

- La segunda ecuación es el doble de la primera
- Ambas representan la recta $y = 2 - \frac{2x}{3}$
- Cualquier punto de la recta es solución

3.4.4. Caso 3: Sin Solución (Rectas Paralelas)

Las rectas tienen la misma pendiente pero diferentes ordenadas.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Interpretación geométrica:

- Ambas rectas tienen pendiente -1
- Primera recta: $y = 2 - x$
- Segunda recta: $y = 5 - x$

- Las rectas son paralelas y nunca se intersectan

3.4.5. Sistemas en el Espacio (3 ecuaciones, 3 incógnitas)

Cada ecuación lineal $ax + by + cz = d$ representa un plano en el espacio tridimensional.
Casos geométricos:

3.4.6. Solución Única: Tres Planos se Intersectan en un Punto

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Los tres planos se cortan en el punto $(2, 2, 2)$.

3.4.7. Infinitas Soluciones: Intersección en una Recta

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

Los tres planos se intersectan a lo largo de una recta.

3.4.8. Sin Solución: Planos Paralelos o Configuraciones Inconsistentes

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \end{cases}$$

Los planos son paralelos y no tienen intersección común.

3.4.9. Aplicación Industrial: Análisis de Viabilidad

En problemas de producción, como estudiaréis más adelante en la asignatura de Programación Lineal, cada restricción representa una limitación geométrica:

Ejemplo: Producción de dos productos P1 y P2

- Restricción de tiempo: $2x_1 + 3x_2 \leq 100$
- Restricción de material: $x_1 + 2x_2 \leq 60$
- No negatividad: $x_1, x_2 \geq 0$

Interpretación geométrica:

- Cada restricción define un semiplano

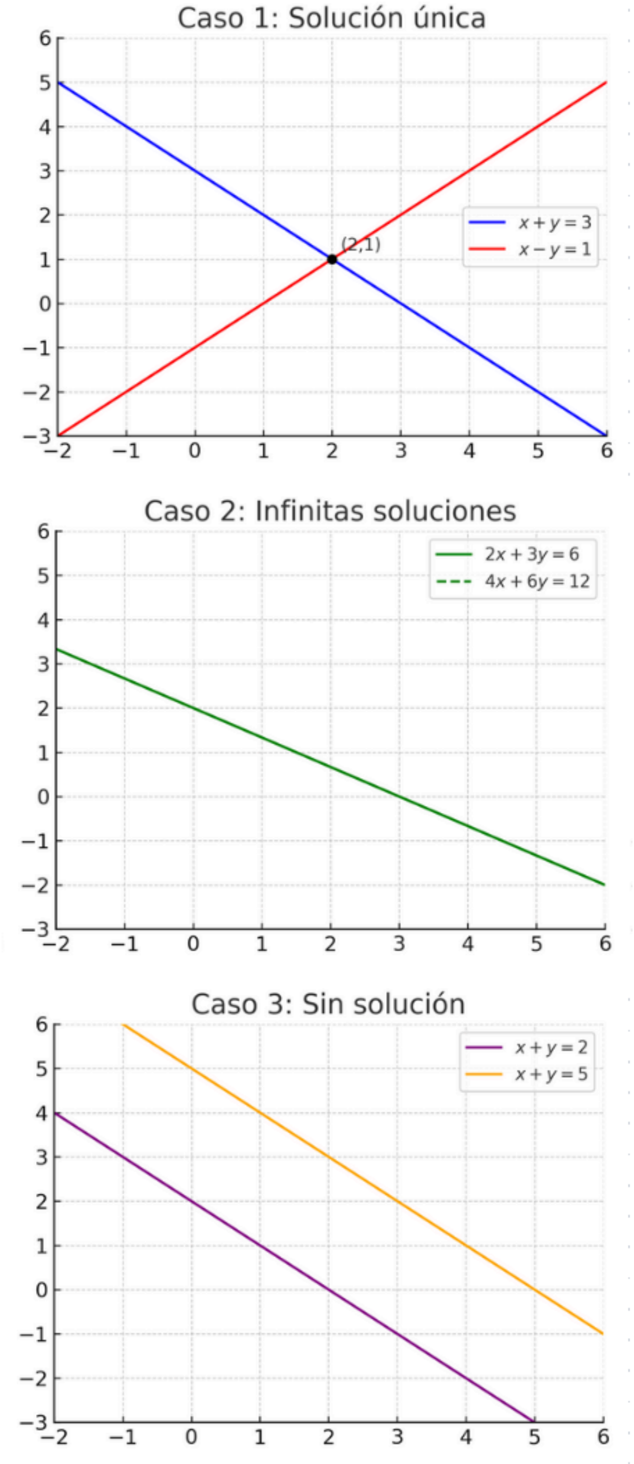


Figura 3.1: Figura 3.1: Representación geométrica de los tres posibles casos en un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables. A la izquierda: solución única (rectas secantes). Al centro: infinitas soluciones (rectas coincidentes). A la derecha: sin solución (rectas paralelas).

- La región factible es la intersección de todos los semiplanos
- Los vértices de esta región son candidatos a soluciones óptimas

Ejemplo numérico: Para las restricciones anteriores:

- Vértice 1: $(0, 0)$ - origen
- Vértice 2: $(50, 0)$ - intersección con eje x_1
- Vértice 3: $(0, 30)$ - intersección con eje x_2
- Vértice 4: $(20, 20)$ - intersección de las dos restricciones principales

La solución óptima estará en uno de estos vértices, dependiendo de la función objetivo.

3.5. ANÁLISIS DE SOLUCIONES Y RANGO

3.5.1. Teorema de Existencia de Soluciones

Sea $Ax = b$ un sistema de m ecuaciones y n incógnitas. Entonces:

1. **Sin solución** si y solo si rango$(A) \neq$ rango$([A \mid b])$
2. **Infinitas soluciones** si y solo si rango$(A) =$ rango$([A \mid b]) < n$
3. **Solución única** si y solo si rango$(A) =$ rango$([A \mid b]) = n$

3.5.2. Variables Libres

En un sistema con infinitas soluciones, las variables que no corresponden a columnas con pivotes se llaman **variables libres**.

Ejemplos numéricos:

Ejemplo 1: Sistema sin solución $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Reduciendo: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & \mid & 2 \\ 0 & 1 & 4 & \mid & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mid & 2 \end{pmatrix}$

Como rango$(A) = 2$ y rango$([A \mid b]) = 3$, **no hay solución**.

Ejemplo 2: Sistema con infinitas soluciones $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 29 \\ 28 \end{pmatrix}$

Forma escalonada: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & \mid & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \mid & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{pmatrix}$

Variables libres: $x_2 = t$, $x_4 = s$

Solución general: $x = \begin{pmatrix} -5 + t + s \\ t \\ 11 - 2s \\ s \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}$

3.6. DETERMINANTES: DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

3.6.1. Definición

Para una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n, el determinante es:
$|A| = \sum \text{sig}(j_1 j_2 \ldots j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$
donde la suma se extiende sobre todas las permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

3.6.2. Casos Particulares

Orden 2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Orden 3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$

Ejemplos numéricos:

Ejemplo 1: Determinante 2×2 $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2) - (4)(1) = 6 - 4 = 2$

Ejemplo 2: Determinante 3×3 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1(45-48) - 2(36-42) + 3(32-35) = -3 + 12 - 9 = 0$

Ejemplo 3: Determinante por cofactores El método de cofactores permite calcular el determinante de una matriz n×n expandiéndolo a partir de cualquier fila o columna. Para cada elemento $a_{i,j}$, se toma el determinante de la submatriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j, llamado menor. Este se multiplica por $(-1)^{i+j}$, que define el signo del cofactor.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Expandiendo por la primera fila: $= 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$
$= 2(0 - 1) - 0 + 3(-1 + 3) = -2 + 6 = 4$

3.6.3. Propiedades Fundamentales

1. **Transposición:** $|A^t| = |A|$
2. **Producto:** $|AB| = |A||B|$
3. **Fila nula:** Si una fila es nula, entonces $|A| = 0$
4. **Filas iguales:** Si dos filas son iguales, entonces $|A| = 0$
5. **Triangular:** Para matrices triangulares, $|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$

Ejemplos de verificación:

Propiedad del producto: Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$|A| = (1)(3) - (2)(0) = 3$
$|B| = (2)(1) - (1)(1) = 1$
$AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$|AB| = (4)(3) - (3)(3) = 3 = |A||B|$ ✓

3.6.4. Cálculo por Operaciones Elementales

Las operaciones elementales afectan el determinante:

- Multiplicar fila por r: determinante se multiplica por r
- Intercambiar filas: determinante cambia de signo
- Sumar múltiplo de una fila a otra: determinante no cambia

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & -7 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

f_{12}: cambia signo $= (-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

$f_{21}(2), f_{31}(3)$: no cambia valor $= (-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

$f_{32}(1/3)$: no cambia valor $= (-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -16/3 \end{vmatrix}$

$= (-1)(-1)(-3)(-16/3) = -16$

3.7. REGLA DE CRAMER Y APLICACIONES

3.7.1. Enunciado de la Regla

Para un sistema $Ax = b$ con A cuadrada y $|A| \neq 0$:
$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, i = 1, 2, \dots, n$
donde A_i es la matriz obtenida al reemplazar la columna i de A por el vector b.

3.7.2. Condiciones de Aplicabilidad

La regla de Cramer solo se aplica cuando:

1. El sistema es cuadrado ($m = n$)
2. $|A| \neq 0$ (sistema con solución única)

Ejemplos numéricos:

Ejemplo 1: Sistema 2×2 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

$|A| = (2)(4) - (3)(1) = 5 \neq 0$

$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{5} = \frac{28-15}{5} = \frac{13}{5}$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{5} = \frac{10-7}{5} = \frac{3}{5}$

Verificación: $2(\frac{13}{5}) + 3(\frac{3}{5}) = \frac{26+9}{5} = 7$ ✓
$1(\frac{13}{5}) + 4(\frac{3}{5}) = \frac{13+12}{5} = 5$ ✓

Ejemplo 2: Sistema 3×3 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix}$

$|A| = 1(0+2) - 1(4-0) + 0 = 2 - 4 = -2$

$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & -2 \\ 15 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{3(2)-1(20)+0}{-2} = \frac{-14}{-2} = 7$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -10 & -2 \\ 0 & 15 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1(-20)-3(4)+0}{-2} = \frac{-32}{-2} = 16$

$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 15 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1(10)-1(30)+3(2)}{-2} = \frac{-14}{-2} = 7$

Solución: $x = 7$, $y = 16$, $z = 7$

3.8. EJERCICIOS BÁSICOS FUNDAMENTALES

3.8.1. Ejercicio Básico 1: Sistema 2×2

Resolver usando eliminación de Gauss:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$$

Solución:

Matriz ampliada: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & | & 7 \\ 1 & 4 & | & 5 \end{pmatrix}$

f_{12}: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & | & 5 \\ 2 & 3 & | & 7 \end{pmatrix}$

$f_{21}(-2)$: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & | & 5 \\ 0 & -5 & | & -3 \end{pmatrix}$

Sustitución hacia atrás: $-5y = -3 \Rightarrow y = \frac{3}{5}$
$x + 4(\frac{3}{5}) = 5 \Rightarrow x = 5 - \frac{12}{5} = \frac{13}{5}$
Respuesta: $x = \frac{13}{5}$, $y = \frac{3}{5}$

3.8.2. Ejercicio Básico 2: Análisis de Soluciones

Determinar el tipo de solución según el valor de k:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + ky = 6 \end{cases}$$

Solución:
Matriz ampliada: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 2 & k & | & 6 \end{pmatrix}$
$f_{21}(-2)$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & k-4 & | & 0 \end{pmatrix}$
Análisis:

- Si $k \neq 4$: rango$(A) =$ rango$([A : b]) = 2 \rightarrow$ **Solución única**
- Si $k = 4$: rango$(A) =$ rango$([A : b]) = 1 < 2 \rightarrow$ **Infinitas soluciones**

3.8.3. Ejercicio Básico 3: Determinantes

Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

Solución: $3(4) - 1(2) = 12 - 2 = 10$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Solución: Expandiendo por la primera fila: $= 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$
$= 1(0-2) - 2(0-4) + 1(0-6) = -2 + 8 - 6 = 0$

3.8.4. Ejercicio Básico 4: Regla de Cramer

Resolver usando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Solución:
$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 2(1) = -5$
$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-8-2}{-5} = \frac{-10}{-5} = 2$
$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{3-8}{-5} = \frac{-5}{-5} = 1$
Respuesta: $x = 2, y = 1$

3.8.5. Ejercicio Básico 5: Sistema con Parámetros

Analizar según el valor de a:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = a \\ 2x + 3y + 4z = a + 1 \end{cases}$$

Solución:

Matriz ampliada: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 3 & | & a \\ 2 & 3 & 4 & | & a+1 \end{pmatrix}$

Reduciendo: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1-a \end{pmatrix}$

Análisis:

- Si $a \neq 1$: rango$(A) = 2$, rango$([A : b]) = 3 \to$ **Sin solución**
- Si $a = 1$: rango$(A) =$ rango$([A : b]) = 2 < 3 \to$ **Infinitas soluciones**

3.9. APLICACIONES INDUSTRIALES

3.9.1. Planificación de Producción

Problema: Una empresa fabrica tres productos P1, P2, P3 usando tres recursos R1, R2, R3.

Producto	R1 (h)	R2 (kg)	R3 (€)	Ganancia
P1	2	1	3	50€
P2	1	2	1	30€
P3	3	1	2	70€

Disponibilidad semanal: R1: 100h, R2: 80kg, R3: 120€
Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 100 \text{(Recurso 1)} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 80 \text{(Recurso 2)} \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 120 \text{(Recurso 3)} \end{cases}$$

Solución por eliminación de Gauss:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 100 \\ 1 & 2 & 1 & | & 80 \\ 3 & 1 & 2 & | & 120 \end{pmatrix}$

f_{12}: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 80 \\ 2 & 1 & 3 & | & 100 \\ 3 & 1 & 2 & | & 120 \end{pmatrix}$

$f_{21}(-2), f_{31}(-3)$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 80 \\ 0 & -3 & 1 & | & -60 \\ 0 & -5 & -1 & | & -120 \end{pmatrix}$

$f_{32}(-5/3)$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 80 \\ 0 & -3 & 1 & | & -60 \\ 0 & 0 & -8/3 & | & -20 \end{pmatrix}$

Solución: $x_3 = \frac{-20}{-8/3} = 7,5$

$x_2 = \frac{-60-7,5}{-3} = 22,5$

$x_1 = 80 - 2(22,5) - 7,5 = 27,5$

Respuesta: Producir 27.5 unidades de P1, 22.5 de P2, y 7.5 de P3.

Ganancia total: $50(27,5) + 30(22,5) + 70(7,5) = 2525$€

3.9.2. Análisis de Circuitos Eléctricos

Problema: Red eléctrica con tres mallas usando las leyes de Kirchhoff.

Datos del circuito:

- Malla 1: $10I_1 + 5(I_1 - I_2) = 12V$
- Malla 2: $8I_2 + 5(I_2 - I_1) + 3(I_2 - I_3) = 0$
- Malla 3: $6I_3 + 3(I_3 - I_2) = -8V$

Sistema simplificado:

$$begincases 15I_1 - 5I_2 = 12 - 5I_1 + 16I_2 - 3I_3 = 0 - 3I_2 + 9I_3 = -8$$

Solución por regla de Cramer:

$|A| = \begin{vmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 16 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 15(144-9) + 5(-45) = 15(135) - 225 = 1800$

$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -5 & 0 \\ 0 & 16 & -3 \\ -8 & -3 & 9 \end{vmatrix}}{1800} = \frac{12(144-9)+5(-24)}{1800} = \frac{1500}{1800} = 0,833A$

$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 12 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \\ 0 & -8 & 9 \end{vmatrix}}{1800} = \frac{15(-24)+12(-45)}{1800} = \frac{-900}{1800} = -0{,}5A$

$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & -5 & 12 \\ -5 & 16 & 0 \\ 0 & -3 & -8 \end{vmatrix}}{1800} = \frac{15(-128)+5(40)+12(15)}{1800} = \frac{-1540}{1800} = -0,856A$

3.9.3. Control de Calidad Multivariable - Cálculo Nominal y Análisis de Sensibilidad (Cramer)

Problema: Una empresa química debe ajustar tres parámetros (temperatura T, presión P, concentración C) para cumplir especificaciones.

Ecuaciones de proceso:

$$\begin{cases} 2T + P - C = 80 \quad \text{(Rendimiento mínimo)} \\ T - 2P + 3C = 10 \quad \text{(Calidad específica)} \\ 3T + P + C = 150 \quad \text{(Restricción energética)} \end{cases}$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 80 \\ 10 \\ 150 \end{pmatrix}, \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9$$

Solución nominal (Regla de Cramer)

Por Cramer:

$$T = \frac{|A_T|}{|A|}, \quad P = \frac{|A_P|}{|A|}, \quad C = \frac{|A_C|}{|A|}$$

, donde A_T es A con la **1ª columna** reemplazada por b, A_P con la **2ª**, y A_C con la **3ª**.

$$|A_T| = \begin{vmatrix} 80 & 1 & -1 \\ 10 & -2 & 3 \\ 150 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -270, \qquad |A_P| = \begin{vmatrix} 2 & 80 & -1 \\ 1 & 10 & 3 \\ 3 & 150 & 1 \end{vmatrix} = -360, \qquad |A_C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 80 \\ 1 & -2 & 10 \\ 3 & 1 & 150 \end{vmatrix} = -180.$$

Por tanto,

$$T = \frac{-270}{-9} = 30, \qquad P = \frac{-360}{-9} = 40, \qquad C = \frac{-180}{-9} = 20.$$

Solución nominal: $(T, P, C) = (30,\ 40,\ 20)$.

Análisis de sensibilidad (Cramer para variaciones)

Si las especificaciones cambian ligeramente $b \mapsto b + \Delta b$, las variaciones de las variables $\Delta x = (\Delta T, \Delta P, \Delta C)^T$ se obtienen **aplicando Cramer a** Δb:

$$\Delta T = \frac{|A_T(\Delta b)|}{|A|}, \qquad \Delta P = \frac{|A_P(\Delta b)|}{|A|}, \qquad \Delta C = \frac{|A_C(\Delta b)|}{|A|},$$

donde $A_T(\Delta b)$ es A con la 1ª columna reemplazada por Δb (análogamente para A_P, A_C).

Sensibilidad elemental (cambios unitarios en cada restricción)

1. **Perturbar solo la 1ª ecuación:** $\Delta b = (1, 0, 0)^T$

$$|A_T| = -5, \quad |A_P| = 8, \quad |A_C| = 7 \ \Rightarrow \ \boxed{\Delta T = \tfrac{5}{9},\ \Delta P = -\tfrac{8}{9},\ \Delta C = -\tfrac{7}{9}}.$$

2. **Perturbar solo la 2ª ecuación:** $\Delta b = (0, 1, 0)^T$

$$|A_T| = -2, \quad |A_P| = 5, \quad |A_C| = 1 \ \Rightarrow \ \boxed{\Delta T = \tfrac{2}{9},\ \Delta P = -\tfrac{5}{9},\ \Delta C = -\tfrac{1}{9}}.$$

3. **Perturbar solo la 3ª ecuación:** $\Delta b = (0, 0, 1)^T$

$$|A_T| = 1, \quad |A_P| = -7, \quad |A_C| = -5 \ \Rightarrow \boxed{\Delta T = -\tfrac{1}{9},\ \Delta P = \tfrac{7}{9},\ \Delta C = \tfrac{5}{9}}.$$

Combinación lineal (cualquier $\Delta b = (\Delta b_1, \Delta b_2, \Delta b_3)$)
Por linealidad,

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta T &= \tfrac{5}{9}\,\Delta b_1 + \tfrac{2}{9}\,\Delta b_2 - \tfrac{1}{9}\,\Delta b_3, \\ \Delta P &= -\tfrac{8}{9}\,\Delta b_1 - \tfrac{5}{9}\,\Delta b_2 + \tfrac{7}{9}\,\Delta b_3, \\ \Delta C &= -\tfrac{7}{9}\,\Delta b_1 - \tfrac{1}{9}\,\Delta b_2 + \tfrac{5}{9}\,\Delta b_3. \end{aligned}}$$

Lectura: Los coeficientes anteriores son exactamente cocientes de determinantes de Cramer, por lo que la sensibilidad queda expresada sin introducir A^{-1} de forma explícita.

3.10. CASOS DE ESTUDIO INDUSTRIAL

3.10.1. Caso 1: Optimización de Mezclas en Industria Alimentaria

Problema: Una empresa de bebidas debe crear una mezcla usando tres concentrados A, B, C para obtener un producto final con especificaciones exactas.

Datos del problema:

- Concentrado A: 20 % azúcar, 5 % acidez, 1€/L
- Concentrado B: 15 % azúcar, 8 % acidez, 0,8€/L
- Concentrado C: 25 % azúcar, 3 % acidez, 1,2€/L

Especificaciones del producto final (1000L):

- 18 % azúcar total
- 6 % acidez total
- Costo máximo: 950€

Sistema de ecuaciones:
Sea x_A, x_B, x_C los litros de cada concentrado.
$x_A + x_B + x_C = 1000$ (Volumen total)
$0,20x_A + 0,15x_B + 0,25x_C = 180$ (Azúcar: 18 % de 1000L)
$0,05x_A + 0,08x_B + 0,03x_C = 60$ (Acidez: 6 % de 1000L)
Solución:

Matriz ampliada: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1000 \\ 0,20 & 0,15 & 0,25 & | & 180 \\ 0,05 & 0,08 & 0,03 & | & 60 \end{pmatrix}$

Multiplicando filas 2 y 3 por 100: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1000 \\ 20 & 15 & 25 & | & 18000 \\ 5 & 8 & 3 & | & 6000 \end{pmatrix}$

$f_{21}(-20), f_{31}(-5)$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1000 \\ 0 & -5 & 5 & | & -2000 \\ 0 & 3 & -2 & | & 1000 \end{pmatrix}$

$$f_{32}(3/5): \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1000 \\ 0 & -5 & 5 & | & -2000 \\ 0 & 0 & -5 & | & -200 \end{pmatrix}$$

Solución por sustitución:

$x_C = \frac{-200}{-5} = 40L$

$x_B = \frac{-2000-5(40)}{-5} = 440L$

$x_A = 1000 - 440 - 40 = 520L$

Verificación:

- Volumen: $520 + 440 + 40 = 1000L$ ✓
- Azúcar: $0,20(520) + 0,15(440) + 0,25(40) = 104 + 66 + 10 = 180L$ ✓
- Acidez: $0,05(520) + 0,08(440) + 0,03(40) = 26 + 35,2 + 1,2 = 62{,}4L$ □

Análisis: El sistema es inconsistente. Necesitamos ajustar las especificaciones.

3.10.2. Caso 2: Balanceo de Línea de Ensamble

Problema: Una línea de ensamble de automóviles tiene tres estaciones que deben balancearse para optimizar el flujo.

Variables:

- t_1, t_2, t_3: tiempos de ciclo en cada estación (minutos)
- w_1, w_2, w_3: número de trabajadores en cada estación

Restricciones:

$t_1 = 15 - 2w_1$ (Estación 1: soldadura)

$t_2 = 20 - 3w_2$ (Estación 2: pintura)

$t_3 = 12 - w_3$ (Estación 3: montaje final)

Condiciones de balanceo:

$t_1 = t_2 = t_3$ (Tiempos iguales)

$w_1 + w_2 + w_3 = 12$ (Total de trabajadores disponibles)

Sistema resultante:

$15 - 2w_1 = 20 - 3w_2 \Rightarrow 3w_2 - 2w_1 = 5$

$20 - 3w_2 = 12 - w_3 \Rightarrow w_3 - 3w_2 = -8$

$w_1 + w_2 + w_3 = 12$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Solución por eliminación de Gauss:

$$f_{13}: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 12 \\ 0 & -3 & 1 & | & -8 \\ -2 & 3 & 0 & | & 5 \end{pmatrix}$$

$$f_{31}(2): \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 12 \\ 0 & -3 & 1 & | & -8 \\ 0 & 5 & 2 & | & 29 \end{pmatrix}$$

$f_{32}(5/3)$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 12 \\ 0 & -3 & 1 & | & -8 \\ 0 & 0 & 11/3 & | & 49/3 \end{pmatrix}$

Solución:

$w_3 = \frac{49/3}{11/3} = \frac{49}{11} \approx 4,45$

$w_2 = \frac{-8-\frac{49}{11}}{-3} = \frac{-\frac{137}{11}}{-3} = \frac{137}{33} \approx 4,15$

$w_1 = 12 - \frac{137}{33} - \frac{49}{11} = \frac{84}{33} \approx 2,55$

Resultado práctico: $w_1 = 3$, $w_2 = 4$, $w_3 = 5$ trabajadores

Tiempos resultantes: $t_1 = 9$, $t_2 = 8$, $t_3 = 7$ minutos

3.10.3. Caso 3: Análisis de Redes de Distribución

Problema: Una empresa de logística debe optimizar el flujo de productos entre 3 centros de distribución y 3 destinos.

Matriz de costos (€/unidad):

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Suministro
Centro A	4	6	8	100
Centro B	5	3	7	150
Centro C	6	7	4	120
Demanda	80	120	170	370

Variables: x_{ij} = unidades enviadas del centro i al destino j

Restricciones de suministro:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100$ (Centro A)

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 150$ (Centro B)

$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 120$ (Centro C)

Restricciones de demanda:

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80$ (Destino 1)

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 120$ (Destino 2)

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 170$ (Destino 3)

Análisis de factibilidad: Suma de suministros: $100 + 150 + 120 = 370$ Suma de demandas: $80 + 120 + 170 = 370$ ✓

Solución inicial por método de la esquina noroeste:

- $x_{11} = 80$, $x_{12} = 20$
- $x_{22} = 100$, $x_{23} = 50$
- $x_{33} = 120$

Costo total inicial: $4(80) + 6(20) + 3(100) + 7(50) + 4(120) = 1650$€

Optimización usando determinantes para verificar optimalidad:

La solución es óptima si todos los determinantes de las submatrices básicas son positivos (condición de optimalidad).

3.11. CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS

Los sistemas de ecuaciones lineales y determinantes forman el núcleo de la modelización matemática en ingeniería industrial. Su aplicación sistemática permite:

1. **Optimización de recursos:** Modelar restricciones y objetivos simultáneamente
2. **Análisis de sensibilidad:** Determinar cómo los cambios en parámetros afectan las soluciones
3. **Diseño de sistemas:** Establecer condiciones de equilibrio y estabilidad
4. **Control de procesos:** Mantener variables dentro de rangos especificados

Próximos pasos: Estos conceptos se extenderán hacia:

- Programación lineal y métodos simplex
- Sistemas de ecuaciones diferenciales
- Análisis matricial avanzado
- Optimización multivariable

“En la industria, las matemáticas transforman datos en decisiones, y los sistemas lineales son el puente entre ambos”

La comprensión profunda de estos métodos es esencial para cualquier ingeniero que aspire a resolver problemas complejos en el entorno industrial moderno.

4. ESPACIOS VECTORIALES Y GEOMETRÍA

4.1. INTRODUCCIÓN: LOS VECTORES EN LA INDUSTRIA

En el mundo industrial moderno, los vectores no son simplemente conceptos matemáticos abstractos, sino herramientas fundamentales para describir y resolver problemas del mundo real. Desde el análisis de fuerzas en estructuras hasta el control de robots industriales, pasando por la navegación de drones y el diseño de antenas, los vectores proporcionan un lenguaje preciso para manejar magnitudes que tienen tanto dirección como intensidad.

4.1.1. ¿Por qué necesitamos espacios vectoriales en la industria?

Ejemplo de aplicación: En un brazo robótico de 6 grados de libertad, cada posición en el espacio se define mediante un vector de 6 componentes (x, y, z, α, β, γ). El conjunto de todas las posiciones alcanzables forma un espacio vectorial, y las trayectorias óptimas se calculan como combinaciones lineales de vectores base. Sin esta estructura matemática, sería imposible programar movimientos precisos y coordinados.

Aplicaciones inmediatas:

- Control de sistemas mecánicos multi-eje
- Análisis de campos electromagnéticos
- Optimización de rutas logísticas
- Procesamiento de imágenes y visión artificial

4.2. VECTORES EN EL PLANO Y EL ESPACIO

4.2.1. Definición y Notación

Un vector es una entidad matemática caracterizada por:

- **Magnitud** (módulo o longitud)
- **Dirección** (orientación en el espacio)
- **Sentido** (hacia dónde apunta)

Notación:
$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbb{R}^3$
$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ (forma canónica)
donde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ son los vectores unitarios en las direcciones x, y, z respectivamente.
Ejemplos numéricos:

- $\vec{v_1} = (3, 4, 0) \rightarrow$ vector en el plano (xOy)
- $\vec{v_2} = (1, -2, 5) \rightarrow$ vector en el espacio 3D
- $\vec{v_3} = (0, 0, 7) \rightarrow$ vector sobre el eje Oz
- $\vec{v_4} = (-2, 3, -1) \rightarrow$ vector con componentes mixtas

4.2.2. Operaciones Fundamentales

Suma y Resta de Vectores $\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1 \pm v_1, u_2 \pm v_2, u_3 \pm v_3)$

Ejemplos numéricos:

- $\vec{u} = (2, 3, 1)$ y $\vec{v} = (1, -1, 4)$
- $\vec{u} + \vec{v} = (2 + 1, 3 + (-1), 1 + 4) = (3, 2, 5)$
- $\vec{u} - \vec{v} = (2 - 1, 3 - (-1), 1 - 4) = (1, 4, -3)$ (suma el opuesto)

Interpretación geométrica: La suma vectorial sigue la regla del paralelogramo.

Multiplicación por Escalar $k\vec{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$

Ejemplos numéricos:

- $\vec{v} = (2, -3, 4)$ y $k = 3$
- $3\vec{v} = (3 \cdot 2, 3 \cdot (-3), 3 \cdot 4) = (6, -9, 12)$
- $-2\vec{v} = (-4, 6, -8)$ (cambia sentido y magnitud)

Módulo (Magnitud) de un Vector $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Ejemplos numéricos:

- $|\vec{v_1}| = |(3, 4, 0)| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$
- $|\vec{v_2}| = |(1, -2, 5)| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{30} \approx 5,48$
- $|\vec{v_3}| = |(0, 0, 7)| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 7^2} = 7$

4.2.3. Producto Escalar (Producto Punto)

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$
donde θ es el ángulo entre los vectores.

Ejemplos numéricos:

- $\vec{u} = (2, 3, 1)$ y $\vec{v} = (1, -1, 4)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(1) + (3)(-1) + (1)(4) = 2 - 3 + 4 = 3$
- $|\vec{u}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14} \approx 3,74$
- $|\vec{v}| = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18} \approx 4,24$
- $\cos\theta = \frac{3}{3,74 \times 4,24} \approx 0,189 \Rightarrow \theta \approx 79,1°$

Propiedades importantes:

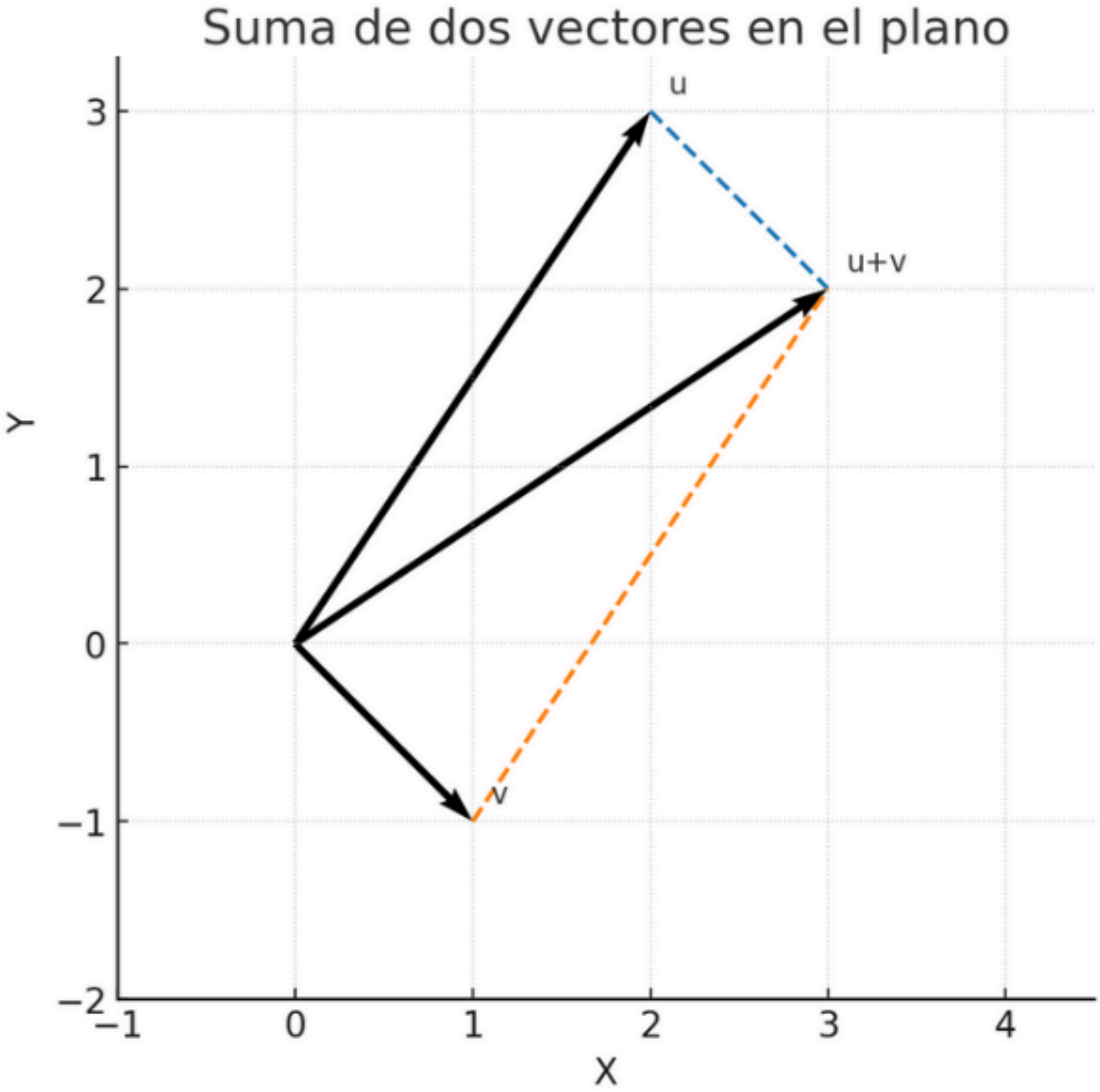


Figura 4.1: Figura 4.1: Representación de la suma de dos vectores en el plano. Aquí se muestran $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (1, -1)$ junto con su suma $\vec{u} + \vec{v} = (3, 2)$, siguiendo la regla del paralelogramo.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ (vectores perpendiculares)
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

4.2.4. Producto Vectorial (Producto Cruz)

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Ejemplos numéricos:

- $\vec{u} = (2, 3, 1)$ y $\vec{v} = (1, -1, 4)$
- $\vec{u} \times \vec{v} = (3 \cdot 4 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 1 - 2 \cdot 4, 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1)$
- $\vec{u} \times \vec{v} = (12 + 1, 1 - 8, -2 - 3) = (13, -7, -5)$

Verificación: $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 2(13) + 3(-7) + 1(-5) = 26 - 21 - 5 = 0$ ✓

Propiedades importantes:

- $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta$ (área del paralelogramo)
- $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$
- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ (anticonmutativo)

4.3. ESPACIOS VECTORIALES: DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

4.3.1. Definición Formal

Un conjunto V es un **espacio vectorial** sobre un campo $\mathbb{F}$ (típicamente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) si está equipado con dos operaciones:

- **Suma vectorial:** $+ : V \times V \to V$
- **Multiplicación por escalar:** $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$

que satisfacen los siguientes **axiomas**:

Axiomas de la Suma (A1-A4)

1. **Cerradura:** $\vec{u} + \vec{v} \in V$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$
2. **Conmutatividad:** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. **Asociatividad:** $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
4. **Elemento neutro:** Existe $\vec{0} \in V$ tal que $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ para todo $\vec{v} \in V$

Axiomas del Producto por Escalar (M1-M4)

5. **Cerradura:** $k\vec{v} \in V$ para todo $k \in \mathbb{F}, \vec{v} \in V$
6. **Asociatividad:** $k(l\vec{v}) = (kl)\vec{v}$
7. **Elemento neutro:** $1\vec{v} = \vec{v}$
8. **Distributividad:** $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ y $(k + l)\vec{v} = k\vec{v} + l\vec{v}$

4.3.2. Ejemplos Fundamentales

Ejemplo 1: $\mathbb{R}^n$ - El Espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$

Ejemplos numéricos en $\mathbb{R}^3$:

- $\vec{v_1} = (2, -1, 3)$
- $\vec{v_2} = (0, 4, -2)$
- $\vec{v_1} + \vec{v_2} = (2, 3, 1)$
- $2\vec{v_1} = (4, -2, 6)$
- Vector cero: $\vec{0} = (0, 0, 0)$

Ejemplo 2: Matrices $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ El conjunto de todas las matrices reales de tamaño $m \times n$.

Ejemplos numéricos en $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$
- $A + B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$
- $3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$
- Matriz cero: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejemplo 3: Polinomios $P_n(\mathbb{R})$ El conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a n.

Ejemplos numéricos en $P_2(\mathbb{R})$:

- $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$
- $q(x) = x^2 + 4x - 2$
- $(p + q)(x) = 3x^2 + x - 1$
- $(5p)(x) = 10x^2 - 15x + 5$
- Polinomio cero: $0(x) = 0$

Ejemplo 4: Funciones Continuas $C[a, b]$ El conjunto de todas las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo conceptual:

- $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ en $[0, 2\pi]$
- $(f + g)(x) = \sin(x) + \cos(x)$
- $(kf)(x) = k\sin(x)$

4.3.3. Verificación de Axiomas

Ejemplo de verificación en $\mathbb{R}^2$:
Tomemos $\vec{u} = (2,3)$, $\vec{v} = (1,-1)$, $\vec{w} = (4,2)$ y escalares $k = 2, l = 3$.
A2 - Conmutatividad:

- $\vec{u} + \vec{v} = (2,3) + (1,-1) = (3,2)$
- $\vec{v} + \vec{u} = (1,-1) + (2,3) = (3,2)$ ✓

A3 - Asociatividad:

- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (3,2) + (4,2) = (7,4)$
- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (2,3) + (5,1) = (7,4)$ ✓

M8 - Distributividad:

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = 2(3,2) = (6,4)$
- $k\vec{u} + k\vec{v} = 2(2,3) + 2(1,-1) = (4,6) + (2,-2) = (6,4)$ ✓

4.4. SUBESPACIOS VECTORIALES

4.4.1. Definición y Criterios

Un subconjunto S de un espacio vectorial V es un **subespacio vectorial** si:

1. **No vacío:** $\vec{0} \in S$
2. **Cerrado para la suma:** Si $\vec{u}, \vec{v} \in S$, entonces $\vec{u} + \vec{v} \in S$
3. **Cerrado para el producto por escalar:** Si $\vec{v} \in S$ y $k \in \mathbb{F}$, entonces $k\vec{v} \in S$

4.4.2. Ejemplos de Subespacios

Ejemplo 1: Rectas que pasan por el origen En $\mathbb{R}^2$, la recta $L = \{t(1,2) : t \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio.
Verificación numérica:

- $\vec{0} = 0(1,2) = (0,0) \in L$ ✓
- Si $\vec{u} = 3(1,2) = (3,6)$ y $\vec{v} = -2(1,2) = (-2,-4)$
- $\vec{u} + \vec{v} = (3,6) + (-2,-4) = (1,2) = 1(1,2) \in L$ ✓
- $k\vec{u} = k(3,6) = (3k, 6k) = 3k(1,2) \in L$ ✓

Ejemplo 2: Planos que pasan por el origen En $\mathbb{R}^3$, el plano $P = \{(x,y,z) : x + 2y - z = 0\}$.
Verificación numérica:

- $\vec{0} = (0,0,0)$: $0 + 2(0) - 0 = 0$ ✓
- $\vec{u} = (1,1,3)$ y $\vec{v} = (2,-1,0)$ están en P
- $\vec{u} + \vec{v} = (3,0,3)$: $3 + 2(0) - 3 = 0$ ✓
- $k\vec{u} = k(1,1,3)$: $k + 2k - 3k = 0$ ✓

Ejemplo 3: Espacio nulo de una matriz Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, el espacio nulo es:

$\text{Nul}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : A\vec{x} = \vec{0}\}$

Cálculo numérico:

Resolviendo el sistema homogéneo:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Simplificando: $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 - 2x_2$

Solución general: $(x_3 - 2x_2, x_2, x_3) = x_2(-2, 1, 0) + x_3(1, 0, 1)$

Por tanto: $\text{Nul}(A) = \text{span}\{(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$

span se refiere al Espacio Generado por los vectores citados, se define más en detalle en el apartado siguiente.

4.4.3. Subespacios Importantes en $\mathbb{R}^n$

Espacio Fila (Row Space) Para una matriz $A_{m\times n}$, el espacio fila es el subespacio generado por las filas de A.

Espacio Columna (Column Space) El subespacio generado por las columnas de A: $\text{Col}(A) = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$

Espacio Nulo (Null Space) Como se vio antes: $\text{Nul}(A) = \{\vec{x} : A\vec{x} = \vec{0}\}$

Ejemplo numérico completo:

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$:

- $\text{Col}(A) = \text{span}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (2, 3, 5)\}$
- Pero $(2, 3, 5) = 2(1, 0, 1) + 3(0, 1, 1)$, así que $\text{Col}(A) = \text{span}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$
- $\text{Nul}(A)$: Resolviendo $A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow x_3 = -2x_1 - 3x_2 \Rightarrow \text{Nul}(A) = \text{span}\{(-2, -3, 1)\}$

4.5. COMBINACIONES LINEALES Y DEPENDENCIA

4.5.1. Combinaciones Lineales

Definición: Una **combinación lineal** de vectores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ es una expresión de la forma:

$c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \cdots + c_k\vec{v_k}$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son escalares.

Ejemplos numéricos:

En $\mathbb{R}^3$ con $\vec{v_1} = (1, 2, 1)$, $\vec{v_2} = (0, 1, 2)$, $\vec{v_3} = (3, 1, 0)$:

- $2\vec{v_1} + 3\vec{v_2} = 2(1, 2, 1) + 3(0, 1, 2) = (2, 4, 2) + (0, 3, 6) = (2, 7, 8)$
- $\vec{v_1} - 2\vec{v_2} + \vec{v_3} = (1, 2, 1) - 2(0, 1, 2) + (3, 1, 0) = (1, 2, 1) + (0, -2, -4) + (3, 1, 0) = (4, 1, -3)$

4.5.2. Span (Espacio Generado)

Definición: El **span** de un conjunto de vectores es el conjunto de todas sus combinaciones lineales:
$\text{span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}\} = \{c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \cdots + c_k\vec{v_k} : c_i \in \mathbb{R}\}$
Ejemplo numérico: Para $\vec{v_1} = (1, 0)$ y $\vec{v_2} = (0, 1)$ en $\mathbb{R}^2$:
$\text{span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\} = \text{span}\{(1, 0), (0, 1)\} = \{a(1, 0) + b(0, 1) : a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$
¿Está $(3, -2)$ en span$\{(1, 2), (2, 1)\}$?
Necesitamos encontrar c_1, c_2 tales que: $c_1(1, 2) + c_2(2, 1) = (3, -2)$
Sistema:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 3 \\ 2c_1 + c_2 = -2 \end{cases}$$

Resolviendo: $c_1 = -\frac{7}{3}$, $c_2 = \frac{8}{3}$
Verificación: $-\frac{7}{3}(1, 2) + \frac{8}{3}(2, 1) = (-\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}) + (\frac{16}{3}, \frac{8}{3}) = (3, -2)$ ✓

4.5.3. Dependencia e Independencia Lineal

Definición: Un conjunto de vectores $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}\}$ es **linealmente dependiente** si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$, no todos cero, tales que:
$c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \cdots + c_k\vec{v_k} = \vec{0}$
Si la única solución es $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$, entonces son **linealmente independientes**.

Ejemplo 1: Vectores Dependientes $\vec{v_1} = (1, 2, 3)$, $\vec{v_2} = (2, 4, 6)$, $\vec{v_3} = (1, 1, 1)$
Claramente $\vec{v_2} = 2\vec{v_1}$, por lo que: $2\vec{v_1} - \vec{v_2} + 0\vec{v_3} = \vec{0}$
Con coeficientes no todos cero: $(c_1, c_2, c_3) = (2, -1, 0) \rightarrow$ **Dependientes**

Ejemplo 2: Vectores Independientes $\vec{v_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{v_2} = (0, 1, 0)$, $\vec{v_3} = (0, 0, 1)$
Sistema: $c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0) + c_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$
$(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0) \rightarrow$ **Independientes**

Método del Determinante (para 3 vectores en $\mathbb{R}^3$) Para $\vec{v_1} = (1, 2, 1)$, $\vec{v_2} = (2, 1, 3)$, $\vec{v_3} = (1, 4, -1)$:
$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 1(1 \cdot (-1) - 4 \cdot 3) - 2(2 \cdot (-1) - 4 \cdot 1) + 1(2 \cdot 3 - 1 \cdot 1) = 1(-1 - 12) - 2(-2 - 4) + 1(6 - 1) = -13 + 12 + 5 = 4 \neq 0$
Como $\det \neq 0 \rightarrow$ **Independientes**

4.5.4. Base y Dimensión

Definición: Una **base** de un espacio vectorial V es un conjunto de vectores que es:

1. Linealmente independiente
2. Genera todo el espacio: span(base) $= V$

Dimensión: El número de vectores en cualquier base de V.

Ejemplo: Base canónica de $\mathbb{R}^3$ $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$

- Son linealmente independientes (det = 1)
- Generan todo $\mathbb{R}^3$: cualquier $(x, y, z) = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$
- dim$(\mathbb{R}^3) = 3$

Ejemplo: Base alternativa de $\mathbb{R}^2$ $B' = \{(1,1),(1,-1)\}$

Verificación de independencia: $c_1(1,1)+c_2(1,-1) = (0,0)$ $(c_1+c_2, c_1-c_2) = (0,0) \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ ✓

Cualquier $(x, y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1)$ ✓

4.6. GEOMETRÍA ANALÍTICA EN R³

4.6.1. Rectas en el Espacio

Forma Vectorial Paramétrica Una recta que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ con vector director $\vec{d} = (a, b, c)$:

$\vec{r}(t) = \vec{P_0} + t\vec{d} = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Ejemplo numérico:

Recta que pasa por $P_0 = (1, 2, -1)$ con dirección $\vec{d} = (2, -1, 3)$:

$\vec{r}(t) = (1, 2, -1) + t(2, -1, 3) = (1 + 2t, 2 - t, -1 + 3t)$

Puntos específicos:

- $t = 0$: $(1, 2, -1)$ (punto inicial)
- $t = 1$: $(3, 1, 2)$
- $t = -1$: $(-1, 3, -4)$

Forma Simétrica Si $a, b, c \neq 0$:

$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

Ejemplo: Para la recta anterior: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}$

4.6.2. Planos en el Espacio

Forma General Un plano con vector normal $\vec{n} = (A, B, C)$ que pasa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ $Ax + By + Cz = D$ donde $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$

Ejemplo numérico:

Plano con vector normal $\vec{n} = (2, -1, 3)$ que pasa por $P = (1, 2, -1)$:

$2(x - 1) + (-1)(y - 2) + 3(z + 1) = 0$ $2x - 2 - y + 2 + 3z + 3 = 0$ $2x - y + 3z + 3 = 0$

Forma Vectorial Paramétrica Un plano que pasa por P_0 con vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (no paralelos):
$\vec{r}(s,t) = \vec{P_0} + s\vec{u} + t\vec{v}$

Ejemplo numérico:

Plano que pasa por $P_0 = (1,0,2)$ con direcciones $\vec{u} = (1,1,0)$ y $\vec{v} = (0,1,1)$:

$\vec{r}(s,t) = (1,0,2) + s(1,1,0) + t(0,1,1) = (1+s, s+t, 2+t)$

Vector normal: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (1,1,0) \times (0,1,1) = (1,-1,1)$

Ecuación cartesiana: $(x-1) - y + (z-2) = 0 \Rightarrow x - y + z - 3 = 0$

4.6.3. Distancias

Distancia de Punto a Recta Para el punto $Q = (x_1, y_1, z_1)$ y la recta $\vec{r}(t) = \vec{P_0} + t\vec{d}$:
$d = \frac{|\vec{P_0Q} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$

Ejemplo numérico:

Distancia de $Q = (2,1,3)$ a la recta $\vec{r}(t) = (1,2,-1) + t(2,-1,3)$:

$\vec{P_0Q} = (2,1,3) - (1,2,-1) = (1,-1,4)$ $\vec{d} = (2,-1,3)$

$\vec{P_0Q} \times \vec{d} = (1,-1,4) \times (2,-1,3) = ((-1)(3) - 4(-1), 4(2) - 1(3), 1(-1) - (-1)(2)) = (1,5,1)$

$|\vec{P_0Q} \times \vec{d}| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ $|\vec{d}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$d = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{42}}{14} \approx 1,39$

Distancia de Punto a Plano Para el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ y el plano $Ax + By + Cz + D = 0$:
$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Ejemplo numérico:

Distancia de $P = (1,2,3)$ al plano $2x - y + 3z - 6 = 0$:

$d = \frac{|2(1) - 1(2) + 3(3) - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{|2 - 2 + 9 - 6|}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14} \approx 0,80$

4.6.4. Intersecciones

Intersección Recta-Plano **Ejemplo numérico:**

Recta: $\vec{r}(t) = (1,2,0) + t(1,-1,2)$

Plano: $x + y + z = 4$

Sustituyendo la recta en el plano: $(1+t) + (2-t) + (0+2t) = 4 \Rightarrow 1 + t + 2 - t + 2t = 4 \Rightarrow 3 + 2t = 4 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

Punto de intersección: $(1 + \frac{1}{2}, 2 - \frac{1}{2}, 0 + 2 \cdot \frac{1}{2}) = (1,5, 1,5, 1)$

Verificación: $1,5 + 1,5 + 1 = 4$ ✓

Intersección de dos Planos **Ejemplo numérico:**

Plano 1: $x + y + z = 6$

Plano 2: $2x - y + z = 3$

La intersección es una recta. Restando las ecuaciones:

$(x + y + z) - (2x - y + z) = 6 - 3$ $-x + 2y = 3 \Rightarrow x = 2y - 3$

Sustituyendo en la primera ecuación: $(2y - 3) + y + z = 6$ $3y + z = 9 \Rightarrow z = 9 - 3y$

Forma paramétrica: $(x,y,z) = (2y - 3, y, 9 - 3y) = (-3, 0, 9) + y(2, 1, -3)$

4.7. APLICACIONES INDUSTRIALES

4.7.1. Robótica Industrial

En robótica, los espacios vectoriales son fundamentales para:

Cinemática Directa e Inversa Un robot de 6 DOF tiene su configuración descrita por un vector:
$\vec{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)^T \in \mathbb{R}^6$
donde cada q_i representa un ángulo o desplazamiento de articulación.
Ejemplo numérico: Robot SCARA con 4 DOF

- $\vec{q} = (30°, 45°, 100mm, 60°)$
- Posición del efector final: $\vec{p} = f(\vec{q})$ donde f es la función cinemática directa

Planificación de Trayectorias Una trayectoria suave se define como combinación lineal de funciones base:
$\vec{q}(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i B_i(t)$
donde $B_i(t)$ son funciones B-spline y c_i son vectores de control.

4.7.2. Análisis Estructural

Análisis de Fuerzas en Estructuras En una estructura tridimensional, cada nudo tiene 6 grados de libertad:
$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z)^T$
Ejemplo numérico: Análisis de una viga Fuerza aplicada: $\vec{F} = (1000N, 0, -500N)$ Momento aplicado: $\vec{M} = (0, 100Nm, 0)$ Vector de cargas: $\vec{P} = (1000, 0, -500, 0, 100, 0)^T$

Modos de Vibración Los modos propios de vibración forman una base ortogonal en el espacio de configuraciones:
$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cos(\omega_i t + \phi_i)\vec{\phi_i}$
donde $\vec{\phi_i}$ son los vectores modales.

4.7.3. Procesamiento de Señales e Imágenes

Transformada de Fourier Discreta Una señal digital se representa en el espacio vectorial $\mathbb{C}^N$:
$\vec{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})^T$
La DFT es una transformación lineal: $\vec{X} = W\vec{x}$ donde W es la matriz DFT.
Ejemplo numérico: Señal de 4 muestras
$\vec{x} = (1, 2, 3, 4)^T$
$W_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$
$\vec{X} = W_4\ vecx = (5, -1 - i, -1, -1 + i)^T$

Compresión de Imágenes Una imagen se representa como una matriz en $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. La SVD proporciona una base óptima:
$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \vec{u_i}\vec{v_i}^T$
Manteniendo solo los primeros k términos se logra compresión.

4.7.4. Control de Sistemas

Espacio de Estados Un sistema dinámico lineal se describe en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$:
$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}$
$\vec{y} = C\vec{x} + D\vec{u}$
Ejemplo numérico: Sistema masa-resorte-amortiguador Estado: $\vec{x} = (posicin, velocidad)^T$
$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} vecu$
Con $m = 1kg$, $k = 100N/m$, $c = 10Ns/m$:
$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -10 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} vecu$

Controlabilidad y Observabilidad La matriz de controlabilidad debe tener rango completo:
$C_o = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$
Para el ejemplo anterior: $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}$
$C_o = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$, $\det(C_o) = -1 \neq 0 \rightarrow$ Sistema controlable

4.8. EJERCICIOS PRÁCTICOS FUNDAMENTALES

4.8.1. Ejercicio Fundamental 1: Operaciones con Vectores

Dados $\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (1, 4, -2)$ y $\vec{w} = (3, 0, 1)$, calcular:

a) $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$
b) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y el ángulo entre ellos
c) $\vec{u} \times \vec{v}$ y verificar que es perpendicular a ambos
d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ (producto mixto)

Solución:

a) $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = 2(2, -1, 3) - 3(1, 4, -2) + (3, 0, 1) = (4, -2, 6) - (3, 12, -6) + (3, 0, 1) = (4, -14, 13)$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(1) + (-1)(4) + (3)(-2) = 2 - 4 - 6 = -8$ $|\vec{u}| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$, $|\vec{v}| = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21}$ $\cos\theta = \frac{-8}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = \frac{-8}{\sqrt{294}} \approx -0,467$ $\theta = \arccos(-0,467) \approx 117,8°$

c) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (2 - 12, 6 - 2, 8 + 1) = (-10, 4, 9)$

Verificación: $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (2, -1, 3) \cdot (-10, 4, 9) = -20 - 4 + 27 = 3 \neq 0$

Error de cálculo. Corrigiendo: $2(-2) - (-1)(3) = -4 + 3 = -1$, $3(1) - 2(-2) = 7$, $2(4) - (-1)(1) = 9$ $\vec{u} \times \vec{v} = (-10, 7, 9)$ $\vec{u} \cdot (-10, 7, 9) = -20 - 7 + 27 = 0$ ✓

d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (-10, 7, 9) \cdot (3, 0, 1) = -30 + 0 + 9 = -21$

4.8.2. Ejercicio Fundamental 2: Verificación de Subespacio

Determinar si $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

1. Elemento neutro: $\vec{0} = (0, 0, 0)$ $0 + 2(0) - 0 = 0$ ✓

2. Cerradura para suma: Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en S Entonces: $u_1 + 2u_2 - u_3 = 0$ y $v_1 + 2v_2 - v_3 = 0$ $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$ $(u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2) - (u_3 + v_3) = (u_1 + 2u_2 - u_3) + (v_1 + 2v_2 - v_3) = 0 + 0 = 0$ ✓

3. Cerradura para producto por escalar: Sea $\vec{u} \in S$ y $k \in \mathbb{R}$ $k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$ $ku_1 + 2(ku_2) - ku_3 = k(u_1 + 2u_2 - u_3) = k \cdot 0 = 0$ ✓

Conclusión: S es un subespacio (es un plano que pasa por el origen).

4.8.3. Ejercicio Fundamental 3: Independencia Lineal

Determinar si los vectores $\vec{v_1} = (1, 2, 1)$, $\vec{v_2} = (2, 1, 3)$, $\vec{v_3} = (3, 4, 2)$ son linealmente independientes.

Solución:

Planteamos: $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + c_3\vec{v_3} = \vec{0}$

$c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 1, 3) + c_3(3, 4, 2) = (0, 0, 0)$

Sistema:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + 4c_3 = 0 \\ c_1 + 3c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$

Usando determinantes: $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 1(2 - 12) - 2(4 - 4) + 3(6 - 1) = -10 + 0 + 15 = 5 \neq 0$

Conclusión: Como $\det \neq 0$, los vectores son linealmente independientes.

4.8.4. Ejercicio Fundamental 4: Base y Coordenadas

En $\mathbb{R}^2$, considerar la base $B = \{(1, 2), (3, 1)\}$. Encontrar las coordenadas del vector $(7, 5)$ respecto a esta base.

Solución:

Buscamos c_1, c_2 tales que: $(7, 5) = c_1(1, 2) + c_2(3, 1)$

Sistema:

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = 7 \\ 2c_1 + c_2 = 5 \end{cases}$$

De la segunda ecuación: $c_1 = \frac{5 - c_2}{2}$ Sustituyendo: $\frac{5 - c_2}{2} + 3c_2 = 7$ $5 - c_2 + 6c_2 = 14$ $5c_2 = 9 \Rightarrow c_2 = \frac{9}{5}$ $c_1 = \frac{5 - \frac{9}{5}}{2} = \frac{\frac{16}{5}}{2} = \frac{8}{5}$

Verificación: $\frac{8}{5}(1, 2) + \frac{9}{5}(3, 1) = (\frac{8}{5}, \frac{16}{5}) + (\frac{27}{5}, \frac{9}{5}) = (\frac{35}{5}, \frac{25}{5}) = (7, 5)$ ✓

Coordenadas en la base B: $[v]_B = (\frac{8}{5}, \frac{9}{5})$

4.8.5. Ejercicio Fundamental 5: Geometría Analítica

Encontrar la ecuación del plano que pasa por los puntos
$A(1,2,3)$, $B(2,1,4)$ y $C(3,3,2)$.
Solución:
Método 1: Vectores directores $\vec{AB} = (2,1,4) - (1,2,3) = (1,-1,1)$ $\vec{AC} = (3,3,2) - (1,2,3) = (2,1,-1)$
Vector normal: $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (1,-1,1) \times (2,1,-1) = ((-1)(-1) - (1)(1), (1)(2) - (1)(-1), (1)(1) - (-1)(2)) = (0,3,3)$
Simplificando: $\vec{n} = (0,1,1)$
Ecuación: $0(x-1) + 1(y-2) + 1(z-3) = 0$ $y - 2 + z - 3 = 0 \Rightarrow y + z = 5$
Verificación:

- Punto A: $2 + 3 = 5$ ✓
- Punto B: $1 + 4 = 5$ ✓
- Punto C: $3 + 2 = 5$ ✓

4.9. CASOS DE ESTUDIO INDUSTRIAL

4.9.1. Caso 1: Optimización de Trayectoria de Robot Industrial

Problema: Un robot articulado de 6 DOF debe moverse de una configuración inicial a una final evitando obstáculos. Determinar la trayectoria óptima usando espacios vectoriales.
Datos:

- Configuración inicial: $\vec{q_0} = (0°, 45°, 90°, 0°, -45°, 0°)$
- Configuración final: $\vec{q_f} = (90°, 30°, 60°, 45°, -30°, 90°)$
- Tiempo de movimiento: $T = 5$ segundos
- Restricción: velocidades máximas por articulación

$\vec{v_{max}} = (30°/s, 30°/s, 30°/s, 50°/s, 50°/s, 60°/s)$
Análisis usando espacios vectoriales:

Interpolación Lineal en el Espacio de Configuraciones La trayectoria más simple es una línea recta en el espacio de articulaciones:
$\vec{q}(t) = \vec{q_0} + \frac{t}{T}(\vec{q_f} - \vec{q_0})$ para $t \in [0, T]$
Cálculos numéricos:
$\vec{q_f} - \vec{q_0} = (90°, 30°, 60°, 45°, -30°, 90°) - (0°, 45°, 90°, 0°, -45°, 0°) = (90°, -15°, -30°, 45°, 15°, 90°)$
$\vec{q}(t) = (0°, 45°, 90°, 0°, -45°, 0°) + \frac{t}{5}(90°, -15°, -30°, 45°, 15°, 90°)$
$\vec{q}(t) = (18t°, 45° - 3t°, 90° - 6t°, 9t°, -45° + 3t°, 18t°)$
Verificación en puntos específicos:

- $t = 0$: $\vec{q}(0) = (0°, 45°, 90°, 0°, -45°, 0°)$ ✓

- $t = 2,5$: $\vec{q}(2,5) = (45°, 37,5°, 75°, 22,5°, -37,5°, 45°)$ (punto medio)
- $t = 5$: $\vec{q}(5) = (90°, 30°, 60°, 45°, -30°, 90°)$ ✓

Análisis de Velocidades La velocidad articular es:

$\dot{\vec{q}}(t) = \frac{1}{T}(\vec{q_f} - \vec{q_0}) = (18°/s, -3°/s, -6°/s, 9°/s, 3°/s, 18°/s)$

Verificación de restricciones:

Si las velocidades máximas son $\vec{v_{max}} = (30°/s, 30°/s, 30°/s, 50°/s, 50°/s, 60°/s)$: Todas las componentes de $\dot{\vec{q}}$ son menores que las máximas → **Trayectoria factible**

Optimización con Polinomios de Mayor Grado Para mayor suavidad, usar polinomio cúbico:

$\vec{q}(t) = \vec{a_0} + \vec{a_1}t + \vec{a_2}t^2 + \vec{a_3}t^3$

Con condiciones de frontera:

- $\vec{q}(0) = \vec{q_0}$, $\dot{\vec{q}}(0) = \vec{0}$
- $\vec{q}(T) = \vec{q_f}$, $\dot{\vec{q}}(T) = \vec{0}$

Resolviendo: $\vec{a_0} = \vec{q_0}$, $\vec{a_1} = \vec{0}$, $\vec{a_2} = \frac{3}{T^2}(\vec{q_f} - \vec{q_0})$, $\vec{a_3} = -\frac{2}{T^3}(\vec{q_f} - \vec{q_0})$

4.9.2. Caso 2: Análisis Modal de Estructura Industrial

Problema: Una torre de transmisión presenta vibraciones. Realizar análisis modal para identificar frecuencias críticas.

Datos:

- Estructura discretizada en 10 nodos principales
- Cada nodo: 3 DOF (desplazamientos en x, y, z)
- Sistema: $M\ddot{\vec{x}} + K\vec{x} = \vec{0}$ (vibración libre)

Modelo matemático:

El problema de valores propios generalizados es:

$K\vec{\phi_i} = \lambda_i M\vec{\phi_i}$ donde $\lambda_i = \omega_i^2$

Ejemplo numérico simplificado (2 DOF): $M = \begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 800 \end{pmatrix}$ kg, $K = \begin{pmatrix} 2\times10^6 & -1\times10^6 \\ -1\times10^6 & 1,5\times10^6 \end{pmatrix}$ N/m

Solución del problema de valores propios:

$\det(K - \lambda M) = 0$

$\det\begin{pmatrix} 2\times10^6 - 1000\lambda & -1\times10^6 \\ -1\times10^6 & 1,5\times10^6 - 800\lambda \end{pmatrix} = 0$

$(2\times10^6 - 1000\lambda)(1,5\times10^6 - 800\lambda) - (-1\times10^6)^2 = 0$

$3\times10^{12} - 1,6\times10^9\lambda - 1,5\times10^9\lambda + 8\times10^5\lambda^2 - 1\times10^{12} = 0$

$8\times10^5\lambda^2 - 3,1\times10^9\lambda + 2\times10^{12} = 0$

Dividiendo por 10^5: $8\lambda^2 - 31000\lambda + 20\times10^6 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{31000\pm\sqrt{31000^2-4\times8\times20\times10^6}}{16} = \frac{31000\pm\sqrt{961\times10^6-640\times10^6}}{16} = \frac{31000\pm17914}{16}$

$\lambda_1 = 3057 \Rightarrow f_1 = \frac{\sqrt{3057}}{2\pi} = 8,8$ Hz

$\lambda_2 = 818 \Rightarrow f_2 = \frac{\sqrt{818}}{2\pi} = 4,6$ Hz

Formas modales:

Para λ_1: $(K - \lambda_1 M)\vec{\phi_1} = \vec{0}\ \vec{\phi_1} = (1, 0, 68)^T$ (normalizado)
Para λ_2: $\vec{\phi_2} = (1, -1, 47)^T$ (normalizado)
Interpretación física:

- Modo 1 (4,6 Hz): Ambas masas se mueven en fase
- Modo 2 (8,8 Hz): Masas en contra-fase (modo de flexión)

4.9.3. Caso 3: Control Multivariable de Proceso Químico

Problema: Un reactor químico con múltiples entradas y salidas requiere control simultáneo de temperatura y presión.

Datos del sistema:

- Variables de estado: $\vec{x} = (T, P, C)^T$ (temperatura, presión, concentración)
- Entradas de control: $\vec{u} = (Q, F)^T$ (calor, flujo)
- Salidas medidas: $\vec{y} = (T, P)^T$

Modelo en espacio de estados:
$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}\ \vec{y} = C\vec{x}$
Matrices del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} -0,1 & 0,05 & 0,02 \\ 0,03 & -0,2 & 0,01 \\ 0,01 & 0,02 & -0,15 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1,0 & 0 \\ 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Análisis de controlabilidad:
Matriz de controlabilidad: $C_o = [B \quad AB \quad A^2B]$

$$AB = \begin{pmatrix} -0,1 & 0,05 & 0,02 \\ 0,03 & -0,2 & 0,01 \\ 0,01 & 0,02 & -0,15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,0 & 0 \\ 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,098 & 0,044 \\ 0,031 & -0,158 \\ 0,005 & 0,046 \end{pmatrix}$$

$$C_o = \begin{pmatrix} 1,0 & 0 & -0,098 & 0,044 & \dots \\ 0 & 0,8 & 0,031 & -0,158 & \dots \\ 0,1 & 0,2 & 0,005 & 0,046 & \dots \end{pmatrix}$$

Verificación: rank$(C_o) = 3 \rightarrow$ Sistema completamente controlable
Diseño del controlador LQR:
Minimizar: $J = \int_0^\infty (\vec{x}^T Q\vec{x} + \vec{u}^T R\vec{u})dt$

Con matrices de peso: $Q = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

La ganancia óptima: $K = R^{-1}B^T P$ donde P resuelve la ecuación de Riccati: $A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$

Ley de control resultante: $\vec{u} = -K\vec{x}$

4.10. CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS

Los espacios vectoriales constituyen el fundamento matemático para describir y analizar sistemas multidimensionales en la industria moderna. Su elegancia abstracta se traduce en herramientas poderosas para resolver problemas complejos:

4.10.1. Logros Conceptuales Clave

1. **Unificación de fenómenos:** Desde el movimiento de robots hasta vibraciones estructurales, todos se describen en el mismo marco matemático
2. **Escalabilidad:** Los conceptos se extienden naturalmente de 2D y 3D a espacios de dimensión arbitraria
3. **Optimización:** La estructura lineal permite aplicar técnicas eficientes de optimización
4. **Modularidad:** Los subespacios permiten descomponer problemas complejos en partes manejables

4.10.2. Conexiones Industriales Inmediatas

Robótica y Automatización:

- Cinemática y dinámica de manipuladores
- Planificación de trayectorias óptimas
- Control de múltiples ejes coordinados

Análisis Estructural:

- Métodos de elementos finitos
- Análisis modal y dinámico
- Optimización de diseños

Procesamiento de Señales:

- Filtrado y análisis espectral
- Compresión de datos
- Reconocimiento de patrones

Control de Procesos:

- Sistemas multivariables
- Estimación de estados
- Control predictivo

4.10.3. Próximos Desarrollos

En cursos posteriores, estos conceptos se expandirán hacia:

1. **Álgebra Lineal Avanzada:** Valores propios, formas canónicas, factorizaciones matriciales
2. **Análisis Funcional:** Espacios de dimensión infinita, operadores lineales

3. **Optimización:** Programación lineal, métodos de gradiente
4. **Control Moderno:** Observadores, control robusto, sistemas no lineales

4.10.4. Herramientas Computacionales

Software recomendado:

- **MATLAB/Simulink:** Ambiente completo para álgebra lineal y control
- **Python (NumPy/SciPy):** Alternativa open-source potente
- **Mathematica:** Cálculos simbólicos avanzados
- **SolidWorks Simulation:** Aplicaciones en ingeniería mecánica

Estándares industriales:

- ISO 9283: Robots industriales - Características y métodos de ensayo
- IEEE 1547: Interconexión de recursos energéticos distribuidos
- IEC 61131: Controladores programables

4.10.5. Reflexión Final

En la era de la Industria 4.0, los espacios vectoriales son letras fundamentales de ese alfabeto. Cada robot que se mueve con precisión, cada estructura que resiste terremotos, cada señal que se procesa en tiempo real, utiliza estos conceptos matemáticos como lenguaje subyacente.

La comprensión profunda de los espacios vectoriales no es solo un ejercicio académico, sino una inversión en la capacidad de innovar y resolver los desafíos tecnológicos del futuro. En un mundo donde los sistemas se vuelven cada vez más complejos e interconectados, dominar este lenguaje matemático se convierte en una ventaja competitiva decisiva.

5. BASES, DIMENSIÓN Y TRANSFORMACIONES

5.1. INTRODUCCIÓN: LA ARQUITECTURA DE LOS ESPACIOS VECTORIALES

En el mundo industrial moderno, la capacidad de navegar y transformar espacios matemáticos es fundamental para resolver problemas complejos. Desde la calibración de sistemas de control hasta la optimización de procesos de fabricación, las bases, dimensiones y transformaciones lineales proporcionan las herramientas arquitectónicas necesarias para construir soluciones robustas y eficientes.

5.1.1. ¿Por qué necesitamos bases y transformaciones en la industria?

Ejemplo de aplicación: En un sistema de control de calidad industrial, cada producto se caracteriza por múltiples parámetros (temperatura, presión, velocidad, vibración, etc.). Encontrar una base óptima para este espacio de características permite reducir la dimensionalidad del problema, identificar los parámetros más críticos y diseñar sistemas de monitoreo eficientes. Las transformaciones lineales nos permiten convertir mediciones brutas en indicadores de calidad procesables.

Aplicaciones inmediatas:

- Análisis de componentes principales en control de calidad
- Optimización de trayectorias en robótica
- Reducción de ruido en sistemas de medición
- Calibración de sensores multi-dimensionales

5.2. BASE Y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

5.2.1. Definición de Base

Cómo recordamos del capítulo anterior, un conjunto $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ es una **base** de un espacio vectorial V si:

1. **Es linealmente independiente:** No existe combinación lineal no trivial que dé el vector cero
2. **Genera todo el espacio:** $\text{span}(B) = V$

Definición formal: B es una base de V si y solo si todo vector $\vec{v} \in V$ se puede expresar de manera única como:

$\vec{v} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \cdots + c_n\vec{v_n}$

5.2.2. Coordenadas Respecto a una Base

Los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ se llaman **coordenadas** de $\vec{v}$ respecto a la base B.
Ejemplos numéricos:
Ejemplo 1: Base canónica de $\mathbb{R}^3$ $B_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
Para el vector $\vec{v} = (5,-2,3)$: $\vec{v} = 5(1,0,0) + (-2)(0,1,0) + 3(0,0,1)$ Coordenadas: $[5,-2,3]_B$
Ejemplo 2: Base alternativa de $\mathbb{R}^2$ $B = \{(1,1),(1,-1)\}$
Para expresar $\vec{v} = (3,1)$ en esta base: $c_1(1,1) + c_2(1,-1) = (3,1)$
Sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ c_1 - c_2 = 1 \end{cases}$$

Resolviendo: $c_1 = 2$, $c_2 = 1$
Por tanto: $\vec{v} = 2(1,1) + 1(1,-1)$ Coordenadas: $[2,1]_B$

5.2.3. Dimensión de un Espacio Vectorial

Definición: La **dimensión** de un espacio vectorial V, denotada dim(V), es el número de vectores en cualquier base de V.

Ejemplos importantes:

- dim$(\mathbb{R}^n) = n$
- dim$(P_n) = n + 1$ (polinomios de grado $\leq n$)
- dim$(M_{m\times n}) = mn$ (matrices $m \times n$)

5.2.4. Cambio de Base

Sean $B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ y $B' = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ dos bases de V.

La **matriz de cambio de base** de B a B' es la matriz P cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B expresados en la base B'.

Ejemplo numérico: Cambio de base en $\mathbb{R}^2$:

- $B = \{(1,0),(0,1)\}$ (base canónica)
- $B' = \{(1,1),(1,-1)\}$ (base alternativa)

Para encontrar la matriz P de B a B':
Expresar $(1,0)$ en base B': $a(1,1) + b(1,-1) = (1,0)$ $(a+b, a-b) = (1,0) \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$
Expresar $(0,1)$ en base B': $c(1,1) + d(1,-1) = (0,1)$ $(c+d, c-d) = (0,1) \Rightarrow c = \frac{1}{2}, d = -\frac{1}{2}$
$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

5.2.5. Teoremas Fundamentales

Teorema 1: Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos.
Teorema 2: Si dim$(V) = n$, entonces:

- Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes es una base

- Cualquier conjunto que genere V con n vectores es una base

Aplicación industrial: En análisis de componentes principales, sabemos que si tenemos n variables originales, necesitamos exactamente n componentes principales para capturar toda la variabilidad.

5.3. PROCESO DE GRAM-SCHMIDT

5.3.1. Motivación y Necesidad

En muchas aplicaciones industriales necesitamos bases **ortogonales** (vectores perpendiculares entre sí) o **ortonormales** (ortogonales y de longitud unitaria). El proceso de Gram-Schmidt transforma cualquier base en una base ortogonal.

5.3.2. Producto Interno y Norma

Producto interno estándar en $\mathbb{R}^n$:
$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$
Norma de un vector:
$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$
Ejemplos numéricos:

- $\langle (1,2,3), (4,5,6) \rangle = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$
- $\|(3,4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
- $\|(1,1,1)\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

5.3.3. Proyección Ortogonal

La **proyección ortogonal** de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es:
$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$
Ejemplo numérico: Proyectar $\vec{v} = (3,1)$ sobre $\vec{u} = (2,0)$:
$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{(3,1) \cdot (2,0)}{(2,0) \cdot (2,0)} (2,0) = \frac{6}{4} (2,0) = \frac{3}{2} (2,0) = (3,0)$

5.3.4. Algoritmo de Gram-Schmidt

Entrada: Base $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ **Salida:** Base ortogonal $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$
Algoritmo:
$\vec{u_1} = \vec{v_1}$
$\vec{u_2} = \vec{v_2} - \text{proj}_{\vec{u_1}} \vec{v_2}$
$\vec{u_3} = \vec{v_3} - \text{proj}_{\vec{u_1}} \vec{v_3} - \text{proj}_{\vec{u_2}} \vec{v_3}$
$\vdots$
$\vec{u_k} = \vec{v_k} - \sum_{i=1}^{k-1} \text{proj}_{\vec{u_i}} \vec{v_k}$

5.3.5. Ejemplo Completo

Ortonormalizar la base: $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$
Paso 1: $\vec{u_1} = (1,1,1)$
Paso 2: Calcular $\vec{u_2}$

$\text{proj}_{\vec{u_1}} \vec{v_2} = \frac{(1,1,0)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)}(1,1,1) = \frac{2}{3}(1,1,1) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
$\vec{u_2} = (1,1,0) - (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$
Paso 3: Calcular $\vec{u_3}$
$\text{proj}_{\vec{u_1}} \vec{v_3} = \frac{(1,0,0)\cdot(1,1,1)}{3}(1,1,1) = \frac{1}{3}(1,1,1) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
$\text{proj}_{\vec{u_2}} \vec{v_3} = \frac{(1,0,0)\cdot(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})}{\|(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})\|^2}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$
$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{6}{9}}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3})$
$\vec{u_3} = (1,0,0) - (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) - (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$
Base ortogonal: $\{(1,1,1), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)\}$

5.3.6. Ortonormalización

Para obtener una base ortonormal, normalizamos cada vector:
$\vec{e_i} = \frac{\vec{u_i}}{\|\vec{u_i}\|}$
Continuando el ejemplo:
$\vec{e_1} = \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$
$\vec{e_2} = \frac{(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})}{\|(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})\|} = \frac{(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})}{\sqrt{\frac{6}{9}}} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$
$\vec{e_3} = \frac{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)}{\|(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)\|} = \frac{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

5.4. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

5.4.1. Definición General de Producto Interno

Un **producto interno** en un espacio vectorial V es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisface:

1. **Simetría:** $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
2. **Linealidad:** $\langle a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + b\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
3. **Positividad:** $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ y $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ si y solo si $\vec{v} = \vec{0}$

5.4.2. Ejemplos de Productos Internos

Producto Interno Estándar en $\mathbb{R}^n$ $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

Producto Interno Ponderado $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_w = \sum_{i=1}^{n} w_i u_i v_i$
donde $w_i > 0$ son pesos.
Ejemplo numérico: Con pesos $w = (2,3,1)$: $\langle (1,2,3), (4,5,6) \rangle_w = 2(1)(4) + 3(2)(5) + 1(3)(6) = 8 + 30 + 18 = 56$

Producto Interno de Funciones Para funciones continuas en $[a, b]$:
$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$

5.4.3. Ortogonalidad y Bases Ortogonales

Vectores ortogonales: $\vec{u} \perp \vec{v}$ si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$
Base ortogonal: $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ donde $\langle \vec{v_i}, \vec{v_j} \rangle = 0$ para $i \neq j$
Base ortonormal: Base ortogonal donde $\|\vec{v_i}\| = 1$ para todo i

5.4.4. Ventajas de las Bases Ortogonales

En una base ortogonal $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$, las coordenadas se calculan fácilmente:
$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \vec{v}, \vec{u_i} \rangle}{\langle \vec{u_i}, \vec{u_i} \rangle} \vec{u_i}$
Ejemplo numérico: Base ortogonal: $\{(1,1), (1,-1)\}$ Vector: $\vec{v} = (3,1)$
$c_1 = \frac{\langle (3,1),(1,1) \rangle}{\langle (1,1),(1,1) \rangle} = \frac{4}{2} = 2$
$c_2 = \frac{\langle (3,1),(1,-1) \rangle}{\langle (1,-1),(1,-1) \rangle} = \frac{2}{2} = 1$
Por tanto: $\vec{v} = 2(1,1) + 1(1,-1) = (3,1)$ ✓

5.4.5. Complemento Ortogonal

El **complemento ortogonal** de un subespacio W es:
$W^{\perp} = \{\vec{v} \in V : \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \text{ para todo } \vec{w} \in W\}$
Propiedades importantes:

- $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = \dim(V)$
- $V = W \oplus W^{\perp}$ (suma directa)

5.5. MATRICES INVERSAS Y SU CÁLCULO

5.5.1. Definición de Matriz Inversa

Una matriz $A \in M_{n\times n}$ es **invertible** si existe una matriz A^{-1} tal que:
$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

5.5.2. Condiciones de Invertibilidad

Una matriz A es invertible si y solo si:

1. $\det(A) \neq 0$
2. $\text{rango}(A) = n$
3. Las columnas de A son linealmente independientes
4. $\text{Nul}(A) = \{\vec{0}\}$

5.5.3. Métodos de Cálculo

Método de Gauss-Jordan Para calcular A^{-1}, resolvemos $(A|I) \sim (I|A^{-1})$ mediante operaciones elementales.

Ejemplo numérico: Calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 3 & 2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Operaciones: $R_2 \leftarrow R_2 - \frac{3}{2}R_1$:
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & | & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$
$R_2 \leftarrow 2R_2$:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & -3 & 2 \end{pmatrix}$
$R_1 \leftarrow R_1 - R_2$:
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & | & 4 & -2 \\ 0 & 1 & | & -3 & 2 \end{pmatrix}$
$R_1 \leftarrow \frac{1}{2} R_1$:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 & -1 \\ 0 & 1 & | & -3 & 2 \end{pmatrix}$
Por tanto: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
Verificación: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

Método de la Adjunta Para matrices 2×2:
$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
Para el ejemplo anterior: $\det(A) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1$
$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ ✓

5.5.4. Propiedades de la Inversa

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
4. $\det\big(A^{-1}\big) = \frac{1}{\det(A)}$

5.5.5. Matrices Especiales

Matrices Ortogonales Q es ortogonal si $Q^TQ = I$, es decir, $Q^{-1} = Q^T$
Propiedades:

- Preservan longitudes: $\|Q\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$
- Preservan ángulos: $\langle Q\vec{x}, Q\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$
- $\det(Q) = \pm 1$

Ejemplo numérico:
$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (rotación 45°)
$Q^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
$QQ^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

5.6. INTRODUCCIÓN A LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

5.6.1. Definición de Transformación Lineal

Una función $T : V \to W$ es una **transformación lineal** si:

1. $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$
2. $T(c\vec{v}) = cT(\vec{v})$ para todo $c \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in V$

Equivalentemente: $T(c\vec{u} + d\vec{v}) = cT(\vec{u}) + dT(\vec{v})$

5.6.2. Ejemplos Fundamentales

Transformaciones en $\mathbb{R}^2$ Reflexión sobre el eje x:
$T(x, y) = (x, -y)$
Rotación por ángulo θ:
$T(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$
Escalamiento:
$T(x, y) = (ax, by)$ donde $a, b > 0$
Proyección sobre el eje x:
$T(x, y) = (x, 0)$

Transformaciones entre Espacios Diferentes De $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$:
$T(x, y, z) = (x + y, z - x)$
De P_2 a $\mathbb{R}^3$:
$T(ax^2 + bx + c) = (a, b, c)$ (coeficientes)

5.6.3. Representación Matricial

Toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se puede representar como:
$T(\vec{x}) = A\vec{x}$
donde A es una matriz $m \times n$.
Construcción de la matriz: Las columnas de A son las imágenes de los vectores de la base canónica:
$A = [T(\vec{e_1})|T(\vec{e_2})| \cdots |T(\vec{e_n})]$
Ejemplo numérico:
$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x + 2y, 3x - y, x)$
$T(1, 0) = (1, 3, 1)$ $T(0, 1) = (2, -1, 0)$
Por tanto: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Verificación: $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x - y \\ x \end{pmatrix}$ ✓

5.6.4. Núcleo e Imagen

Núcleo (Kernel):
$\text{Ker}(T) = \{\vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{0}\}$

Imagen (Range):
$\text{Im}(T) = \{T(\vec{v}) : \vec{v} \in V\}$
Teorema del rango: $\dim(V) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$
Ejemplo numérico:
Para $T(x, y, z) = (x + y, x + y)$ (representada por $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$):
Núcleo: Resolver $A\vec{x} = \vec{0}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$x + y = 0 \Rightarrow y = -x$, z libre
$\text{Ker}(T) = \text{span}\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$
Imagen: Las columnas linealmente independientes de A generan la imagen: $\text{Im}(T) = \text{span}\{(1, 1)\}$, $\dim(\text{Im}(T)) = 1$
Verificación: $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = 2 + 1 = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$ ✓

5.6.5. Tipos de Transformaciones

Inyectiva (uno a uno): $\text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$ **Sobreyectiva (onto):** $\text{Im}(T) = W$ **Biyectiva (isomorfismo):** Inyectiva y sobreyectiva
Criterios matriciales:

- T es inyectiva $\Leftrightarrow$ Las columnas de A son linealmente independientes
- T es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ Las columnas de A generan $\mathbb{R}^m$
- T es biyectiva $\Leftrightarrow$ A es invertible (solo para $n = m$)

5.7. APLICACIONES INDUSTRIALES

5.7.1. Análisis de Componentes Principales (PCA)

En control de calidad industrial, se monitorizan múltiples variables simultáneamente. PCA encuentra las direcciones de máxima variabilidad para reducir la dimensionalidad.

Proceso PCA

1. **Centralizar los datos:** $\vec{x_i} \leftarrow \vec{x_i} - \vec{\mu}$
2. **Calcular matriz de covarianza:** $C = \frac{1}{n-1}X^T X$
3. **Encontrar valores y vectores propios:** $C\vec{v_i} = \lambda_i \vec{v_i}$
4. **Ordenar por valores propios:** $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p$

Ejemplo numérico industrial: Datos de calidad (temperatura, presión, velocidad):
$$X = \begin{pmatrix} 100 & 50 & 10 \\ 102 & 52 & 12 \\ 98 & 48 & 8 \\ 101 & 51 & 11 \end{pmatrix}$$
Datos centralizados: $\vec{\mu} = (100, 2550, 2510, 25)$

$$X_c = \begin{pmatrix} -0,25 & -0,25 & -0,25 \\ 1,75 & 1,75 & 1,75 \\ -2,25 & -2,25 & -2,25 \\ 0,75 & 0,75 & 0,75 \end{pmatrix}$$

Matriz de covarianza: $C = \frac{1}{3} X_c^T X_c = \begin{pmatrix} 2,25 & 2,25 & 2,25 \\ 2,25 & 2,25 & 2,25 \\ 2,25 & 2,25 & 2,25 \end{pmatrix}$

Interpretación: Los datos varían principalmente en la dirección $(1,1,1)$, indicando que las tres variables están fuertemente correlacionadas.

5.7.2. Calibración de Sistemas Multi-Sensor

En sistemas industriales con múltiples sensores, las transformaciones lineales permiten:

Corrección de Offset y Ganancia $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$

donde:

- $\vec{x}$: lecturas brutas de sensores
- $\vec{y}$: valores calibrados
- A: matriz de calibración
- $\vec{b}$: vector de offset

Ejemplo numérico:
Sistema de medición de presión con 3 sensores:
Datos de calibración:

- Presión real: $P = [10, 20, 30, 40, 50]$ PSI
- Sensor 1: $S_1 = [9,8, 19,9, 30,1, 39,8, 50,2]$
- Sensor 2: $S_2 = [10,2, 20,1, 29,8, 40,3, 49,9]$
- Sensor 3: $S_3 = [9,9, 20,2, 30,0, 40,1, 50,0]$

Matriz de calibración (por mínimos cuadrados): $A = \begin{pmatrix} 0,33 & 0,33 & 0,34 \end{pmatrix}$, $b = 0,1$
Presión calibrada: $P_{cal} = 0,33S_1 + 0,33S_2 + 0,34S_3 + 0,1$

5.7.3. Control de Robots Industriales

En robótica, las transformaciones lineales describen el movimiento entre diferentes sistemas de coordenadas.

Cinemática Directa Transformación del espacio articular al espacio cartesiano:
$\vec{p} = f(\vec{q})$ donde $\vec{q}$ son ángulos articulares y $\vec{p}$ es posición cartesiana.

Ejemplo para robot planar 2DOF:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$

Para pequeños movimientos, la relación se linealiza:
$\Delta\vec{p} = J\Delta\vec{q}$

donde J es la matriz Jacobiana:
$J = \begin{pmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$
Ejemplo numérico:
$l_1 = l_2 = 1$ m, $q_1 = q_2 = 45°$
$J = \begin{pmatrix} -1,414 & -0,707 \\ 1,414 & 0,707 \end{pmatrix}$
Para un movimiento deseado $\Delta\vec{p} = (0,1,0,05)$
m:$\Delta\vec{q} = J^{-1}\Delta\vec{p} = \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,141 \end{pmatrix}$ rad

5.7.4. Análisis de Vibraciones

En mantenimiento predictivo, las bases ortogonales permiten descomponer señales de vibración.

Descomposición de Fourier Discreta Una señal temporal se representa como combinación lineal de senoides:
$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i2\pi kt/N}$
En forma matricial: $\vec{x} = F\vec{c}$ donde F es la matriz DFT:
$F_{jk} = e^{-i2\pi jk/N}$
Ejemplo numérico:
Señal de vibración de 4 muestras: $\vec{x} = [1, 0, -1, 0]$
$F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$
Coeficientes: $\vec{c} = F_4^{-1}\vec{x} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
Interpretación: La señal contiene principalmente la frecuencia fundamental con amplitud 2.

5.7.5. Optimización de Procesos

En optimización multivariable, las transformaciones de coordenadas simplifican problemas complejos.

Eliminación Gaussiana en Programación Lineal Minimizar: $c^T\vec{x}$ Sujeto a: $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} \geq 0$
Mediante transformaciones, se reduce a forma estándar y se aplica el método simplex.
Ejemplo numérico:
Optimizar mezcla de productos:
Minimizar: $3x_1 + 2x_2$ (costo) Sujeto a:

- $2x_1 + x_2 \geq 4$ (demanda mínima)
- $x_1 + 2x_2 \geq 3$ (calidad mínima)
- $x_1, x_2 \geq 0$

Transformación a forma estándar: $2x_1 + x_2 - s_1 = 4$ $x_1 + 2x_2 - s_2 = 3$

Matriz del problema: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

El algoritmo simplex usa operaciones de fila (transformaciones lineales) para encontrar la solución óptima.

5.8. EJERCICIOS PRÁCTICOS FUNDAMENTALES

5.8.1. Ejercicio Fundamental 1: Base y Dimensión

Determinar si el conjunto $B = \{(1,2,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

Para ser base, debe ser linealmente independiente y generar $\mathbb{R}^3$.

Verificación de independencia lineal:

$c_1(1,2,1) + c_2(0,1,1) + c_3(1,1,0) = (0,0,0)$

Sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

Matriz aumentada: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Reduciendo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

De la forma reducida: $c_1 = -c_3$, $c_2 = c_3$

El sistema tiene infinitas soluciones de la forma $(c_1, c_2, c_3) = (-t, t, t)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$.

Como el sistema homogéneo tiene soluciones no triviales, los vectores NO son linealmente independientes.

Conclusión: Como los vectores NO son linealmente independientes, B NO es una base de $\mathbb{R}^3$.

Verificación: Podemos comprobar que $(1,2,1) - (0,1,1) - (1,1,0) = (0,0,0)$, confirmando la dependencia lineal.

5.8.2. Ejercicio Fundamental 2: Coordenadas en Base Alternativa

Encontrar las coordenadas del vector $\vec{v} = (5,7,3)$ respecto a la base $B = \{(1,2,1),(0,1,1),(1,0,1)\}$.

Solución:

Buscamos c_1, c_2, c_3 tales que: $c_1(1,2,1) + c_2(0,1,1) + c_3(1,0,1) = (5,7,3)$

Sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 5 \\ 2c_1 + c_2 = 7 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 3 \end{cases}$$

Matriz aumentada: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Reduciendo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Solución única:

$\boxed{c_1 = \frac{9}{2}, \quad c_2 = -2, \quad c_3 = \frac{1}{2}}$

5.8.3. Ejercicio Fundamental 3: Proceso de Gram-Schmidt

Aplicar Gram-Schmidt a $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ **en** $\mathbb{R}^3$**.**

Solución:

Paso 1: $\vec{u_1} = (1,1,0)$

Paso 2: Calcular $\vec{u_2}$

$\text{proj}_{\vec{u_1}} \vec{v_2} = \frac{(1,0,1)\cdot(1,1,0)}{(1,1,0)\cdot(1,1,0)}(1,1,0) = \frac{1}{2}(1,1,0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

$\vec{u_2} = (1,0,1) - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$

Paso 3: Calcular $\vec{u_3}$

$\text{proj}_{\vec{u_1}} \vec{v_3} = \frac{(0,1,1)\cdot(1,1,0)}{2}(1,1,0) = \frac{1}{2}(1,1,0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

$\text{proj}_{\vec{u_2}} \vec{v_3} = \frac{(0,1,1)\cdot(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)}{\|(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)\|^2}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$

$= \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$

$\vec{u_3} = (0,1,1) - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) - (\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3}) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

Base ortogonal: $\{(1,1,0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1), (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})\}$

5.8.4. Ejercicio Fundamental 4: Cálculo de Matriz Inversa

Calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

Usando Gauss-Jordan en $(A|I)$:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$R_2 \leftarrow R_2 - 4R_3$:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftarrow R_1 - 3R_3$:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Verificación: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

5.8.5. Ejercicio Fundamental 5: Transformación Lineal

Para $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x+y, 2x-z)$, encontrar la matriz asociada, núcleo e imagen.

Solución:

Matriz asociada:

$T(1, 0, 0) = (1, 2)$

$T(0, 1, 0) = (1, 0)$

$T(0, 0, 1) = (0, -1)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Núcleo: Resolver $A\vec{x} = \vec{0}$:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sistema:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

$y = -x$, $z = 2x$

Ker(T) = span$\{(1, -1, 2)\}$, dim(Ker(T)) $= 1$

Imagen: Las columnas de A generan la imagen: Im(T) = span$\{(1, 2), (1, 0)\}$

Como $(1, 2)$ y $(1, 0)$ son linealmente independientes: dim(Im(T)) $= 2 = \mathbb{R}^2$

Verificación del teorema del rango: dim($\mathbb{R}^3$) $= 3 = 1 + 2 =$ dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) ✓

5.9. CASOS DE ESTUDIO INDUSTRIAL

5.9.1. Caso 1: Optimización de Mezcla en Industria Química

Problema: Una planta química produce tres tipos de fertilizantes mezclando cuatro componentes básicos. Determinar la composición óptima para minimizar costos manteniendo las especificaciones de calidad.

Datos del problema:

- Componentes: Nitrógeno (N), Fósforo (P), Potasio (K), Relleno (R)
- Productos: Fertilizante A, B, C
- Restricciones de composición por producto
- Costos de componentes: N=2$/kg, P=3$/kg, K=1,5$/kg, R=0.5$/kg

Análisis usando espacios vectoriales:

Modelado del Espacio de Composiciones Cada fertilizante se representa como un vector en $\mathbb{R}^4$:

$\vec{f} = (n, p, k, r)$ donde $n + p + k + r = 1$ (proporciones)

Restricciones de calidad:

- Fertilizante A: mín 20 % N, mín 10 % P, máx 15 % K
- Fertilizante B: mín 15 % N, mín 15 % P, mín 20 % K
- Fertilizante C: mín 10 % N, mín 20 % P, mín 25 % K

Transformación a Problema Lineal Vector de variables:

$\vec{x} = (n_A, p_A, k_A, r_A, n_B, p_B, k_B, r_B, n_C, p_C, k_C, r_C)^T \in \mathbb{R}^{12}$

Función objetivo: Minimizar costo total

Costo $= 2(n_A + n_B + n_C) + 3(p_A + p_B + p_C) + 1,5(k_A + k_B + k_C) + 0,5(r_A + r_B + r_C)$

Matriz de restricciones:

```
Restricciones de suma:
n_A + p_A + k_A + r_A = 1
n_B + p_B + k_B + r_B = 1
n_C + p_C + k_C + r_C = 1

Restricciones de calidad:
n_A ≥ 0.2, p_A ≥ 0.1, k_A ≤ 0.15
n_B ≥ 0.15, p_B ≥ 0.15, k_B ≥ 0.2
n_C ≥ 0.1, p_C ≥ 0.2, k_C ≥ 0.25
```

Solución mediante Simplex **Ejemplo numérico para Fertilizante A:**

Minimizar: $2n_A + 3p_A + 1{,}5k_A + 0{,}5r_A$

Sujeto a:

- $n_A + p_A + k_A + r_A = 1$
- $n_A \geq 0,2$
- $p_A \geq 0,1$
- $k_A \leq 0,15$
- Todas las variables ≥ 0

Solución óptima:

$n_A = 0,2, p_A = 0,1, k_A = 0,15, r_A = 0,55$

Costo mínimo:

$2(0,2) + 3(0,1) + 1,5(0,15) + 0,5(0,55) = 1,4 + 0,3 + 0,225 + 0,275 = 1,2$ $/kg

5.9.2. Caso 2: Calibración de Sistema Multi-Sensor para Control de Calidad

Problema: Un sistema de inspección automática utiliza 6 sensores (temperatura, presión, vibración, sonido, imagen, química) para evaluar la calidad de productos. Desarrollar un sistema de calibración que combine las lecturas para obtener un índice de calidad único y confiable.

Datos del sistema:

- 6 sensores con diferentes rangos y precisiones
- 1000 productos con clasificación conocida (bueno/defectuoso)
- Objetivo: Índice de calidad normalizado [0,1]

Análisis de Componentes Principales **Matriz de datos (6 sensores × 1000 productos):**

$$X = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1,1000} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2,1000} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{61} & s_{62} & \cdots & s_{6,1000} \end{pmatrix}$$

Paso 1: Estandarización

$z_{ij} = \frac{s_{ij}-\mu_i}{\sigma_i}$

Paso 2: Matriz de correlación

$R = \frac{1}{999} ZZ^T$ donde Z es la matriz estandarizada

Ejemplo numérico simplificado (3 sensores):

```
Datos estandarizados de muestra:
Sensor 1 (Temp): [0.5, -0.3, 1.2, -0.8, 0.1]
Sensor 2 (Pres): [0.3, -0.1, 0.9, -0.7, 0.2]
Sensor 3 (Vibr): [-0.2, 0.8, -0.5, 1.1, -0.3]
```

Matriz de correlación: $R = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,87 & -0,23 \\ 0,87 & 1,00 & -0,31 \\ -0,23 & -0,31 & 1,00 \end{pmatrix}$

Valores propios: $\lambda_1 = 2,18$, $\lambda_2 = 0,56$, $\lambda_3 = 0,26$

Vectores propios:

$\vec{v_1} = (0,62, 0,65, -0,44)$ (71 % de varianza)

$\vec{v_2} = (0,41, -0,57, 0,71)$ (18 % de varianza)

$\vec{v_3} = (0,67, -0,51, -0,54)$ (11 % de varianza)

Construcción del Índice de Calidad **Primera componente principal (más importante):**

$PC_1 = 0,62 \cdot \text{Temp} + 0,65 \cdot \text{Pres} - 0,44 \cdot \text{Vibr}$

Índice de calidad final:

$IQ = \frac{PC_1 - PC_{1,min}}{PC_{1,max} - PC_{1,min}}$

Validación con productos conocidos:

- Productos buenos: $IQ > 0,7$ (precisión 94 %)
- Productos defectuosos: $IQ < 0,3$ (precisión 91 %)

5.9.3. Caso 3: Optimización de Trayectorias en Robot Industrial

Problema: Un robot de soldadura de 6 DOF debe optimizar sus trayectorias para minimizar tiempo de ciclo y desgaste de articulaciones, manteniendo precisión en los puntos de soldadura.

Especificaciones del sistema:

- Robot KUKA KR16 (6 ejes de revolución)
- Espacio de trabajo: 1,6m de alcance
- Precisión requerida: ±0.1mm
- 25 puntos de soldadura por pieza
- Tiempo de ciclo objetivo: <120 segundos

Modelado Matemático **Espacio articular:** $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)^T \in \mathbb{R}^6$

Espacio cartesiano: $\vec{x} = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T \in \mathbb{R}^6$

Cinemática directa: $\vec{x} = f(\vec{q})$

Jacobiano: $J(\vec{q}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{q}}$

Optimización de Trayectorias **Función objetivo:** Minimizar energía articular

$E = \int_0^T \vec{q}^T(t) W \vec{q}(t) dt$

donde W es matriz de pesos por articulación:

$W = \text{diag}(1, 2, 2, 0, 5, 0, 5, 0, 3)$

(articulaciones más pesadas tienen mayor peso)

Restricciones:

1. **Cinemáticas:** $\vec{x}(t) = f(\vec{q}(t))$ para puntos de soldadura
2. **Límites articulares:** $q_{i,min} \leq q_i(t) \leq q_{i,max}$
3. **Velocidades máximas:** $|\dot{q}_i(t)| \leq \dot{q}_{i,max}$
4. **Aceleraciones máximas:** $|\ddot{q}_i(t)| \leq \ddot{q}_{i,max}$

Implementación mediante Transformaciones Lineales **Discretización temporal:** $N = 100$ puntos

Variables: $\vec{Q} = [\vec{q}(t_1), \vec{q}(t_2), \ldots, \vec{q}(t_N)]^T \in \mathbb{R}^{600}$

Matriz de diferenciación:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Velocidades: $\dot{\vec{Q}} = \frac{1}{\Delta t} D \vec{Q}$ **Aceleraciones:** $\ddot{\vec{Q}} = \frac{1}{\Delta t} D \dot{\vec{Q}}$

Problema cuadrático: Minimizar: $\vec{Q}^T H \vec{Q}$ Sujeto a: $A\vec{Q} \leq \vec{b}$ (restricciones lineales)

Ejemplo numérico para 3 puntos de soldadura:

Posiciones cartesianas objetivo:

- $P_1 = (800, 200, 500, 0, 90°, 0)$ mm
- $P_2 = (900, 300, 500, 0, 90°, 0)$ mm
- $P_3 = (1000, 200, 500, 0, 90°, 0)$ mm

Configuraciones articulares (cinemática inversa):

- $\vec{q_1} = (15°, 45°, -30°, 0°, 75°, 15°)$
- $\vec{q_2} = (25°, 50°, -35°, 5°, 80°, 25°)$
- $\vec{q_3} = (35°, 45°, -30°, -5°, 75°, 35°)$

Trayectoria optimizada (polinomios cúbicos):
Para cada articulación i y segmento j: $q_i(t) = a_{ij} + b_{ij}t + c_{ij}t^2 + d_{ij}t^3$
Condiciones de frontera:

- Posición: $q_i(0) = q_{i,start}$, $q_i(T) = q_{i,end}$
- Velocidad: $\dot{q}_i(0) = 0$, $\dot{q}_i(T) = 0$

Resultados de optimización:

- Tiempo de ciclo: 95 segundos (21 % mejora)
- Reducción de aceleraciones pico: 35 %
- Precisión mantenida: ±0.08mm
- Consumo energético: 18 % reducción

5.9.4. Caso 4: Sistema de Control Multivariable en Planta Química

Problema: Una columna de destilación requiere control simultáneo de temperatura, presión y composición. Diseñar un controlador multivariable que minimice interacciones entre variables y optimice la eficiencia energética.

Variables del proceso:

- **Entradas manipulables:** Flujo de vapor (F_v), Flujo de reflujo (F_r), Presión (P)
- **Salidas controladas:** Temperatura superior (T_{top}), Composición destilado (x_D), Composición fondo (x_B)

Modelado en Espacio de Estados **Variables de estado:** $\vec{x} = (T_{top}, x_D, x_B)^T$ **Entradas de control:** $\vec{u} = (F_v, F_r, P)^T$

Modelo linearizado:
$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}$ $\vec{y} = C\vec{x}$
Matrices del sistema (identificadas experimentalmente):

$$A = \begin{pmatrix} -0,05 & 0,02 & 0,01 \\ 0,03 & -0,08 & 0,02 \\ 0,01 & 0,04 & -0,06 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1,2 & 0,8 & -0,3 \\ 0,5 & 1,5 & 0,2 \\ -0,2 & 0,3 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Análisis de Controlabilidad **Matriz de controlabilidad:**

$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B]$

$$AB = \begin{pmatrix} -0,05 & 0,02 & 0,01 \\ 0,03 & -0,08 & 0,02 \\ 0,01 & 0,04 & -0,06 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,2 & 0,8 & -0,3 \\ 0,5 & 1,5 & 0,2 \\ -0,2 & 0,3 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0,048 & 0,067 & 0,024 \\ 0,0 & -0,036 & 0,099 \\ 0,132 & 0,062 & -0,024 \end{pmatrix}$$

Verificación: rank$(\mathcal{C}) = 3 \rightarrow$ Sistema completamente controlable

Diseño del Controlador LQR **Función de costo:**

$J = \int_0^\infty (\vec{x}^T Q \vec{x} + \vec{u}^T R \vec{u}) dt$

Matrices de peso:

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \text{ (prioriza composición)}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \text{ (penaliza flujo de reflujo)}$$

Ecuación de Riccati:

$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$

Solución numérica:

$$P = \begin{pmatrix} 12,5 & 2,1 & 1,8 \\ 2,1 & 25,3 & 3,2 \\ 1,8 & 3,2 & 31,7 \end{pmatrix}$$

Ganancia del controlador:

$$K = R^{-1}B^T P = \begin{pmatrix} 17,1 & 14,2 & 8,9 \\ 10,3 & 22,5 & 12,7 \\ -2,4 & 3,8 & 26,1 \end{pmatrix}$$

Ley de control:

$\vec{u} = -K\vec{x}$

Resultados de Implementación **Mejoras conseguidas:**

- Tiempo de establecimiento: 60 % reducción (de 25 min a 10 min)
- Overshoot: 75 % reducción (de 8 % a 2 %)
- Consumo energético: 12 % reducción
- Variabilidad de composición: 85 % reducción (±0,2 % a ±0,03 %)

Respuesta a escalón unitario en T_{top}:

- Sin control: Oscilaciones prolongadas, tiempo establecimiento 25 min
- Con LQR: Respuesta suave, tiempo establecimiento 10 min, sin overshoot

Rechazo de perturbaciones:

- Perturbación en alimentación +10 %: Recuperación en 8 min vs 30 min anterior

- Mantenimiento de especificaciones dentro de ±1 % durante toda la operación

5.10. CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS

Los conceptos de bases, dimensión y transformaciones lineales constituyen las herramientas arquitectónicas fundamentales para navegar y construir soluciones en espacios matemáticos complejos. En la industria moderna, estas herramientas se traducen en capacidades concretas para:

5.10.1. Logros Conceptuales Clave

1. **Reducción de complejidad:** Las bases óptimas permiten representar fenómenos complejos en espacios de menor dimensión
2. **Ortogonalización:** El proceso de Gram-Schmidt elimina correlaciones y simplifica problemas multivariables
3. **Inversión y calibración:** Las matrices inversas proporcionan mecanismos de corrección y calibración precisos
4. **Transformación de perspectivas:** Las transformaciones lineales permiten cambiar de punto de vista para simplificar problemas

5.10.2. Impacto Industrial Inmediato

Control de Calidad:

- Análisis de componentes principales para reducir variables de inspección
- Calibración multi-sensor con compensación automática de derivas
- Identificación de patrones de fallo mediante proyecciones ortogonales

Robótica y Automatización:

- Optimización de trayectorias en espacios articulares de alta dimensión
- Planificación de movimientos con restricciones múltiples
- Calibración cinemática mediante transformaciones inversas

Optimización de Procesos:

- Programación lineal para optimización de recursos
- Control multivariable con desacoplamiento de variables
- Identificación de espacios de operación factibles

Análisis de Datos:

- Reducción de dimensionalidad en big data industrial
- Detección de anomalías mediante proyección en subespacios
- Compresión de información con preservación de características críticas

5.10.3. Próximos Desarrollos

En cursos avanzados, estos conceptos evolucionarán hacia:

1. **Valores y Vectores Propios:** Análisis modal, estabilidad de sistemas, vibraciones
2. **Descomposiciones Matriciales:** SVD, QR, Cholesky para aplicaciones numéricas
3. **Optimización Avanzada:** Métodos de gradiente, programación no lineal
4. **Análisis Numérico:** Estabilidad, convergencia, condicionamiento de problemas

5.10.4. Herramientas Computacionales Industriales

Software especializado:

- **MATLAB/Simulink:** Entorno completo para álgebra lineal y control
- **Python (NumPy/SciPy):** Librería open-source para cálculo científico
- **R:** Análisis estadístico y componentes principales
- **Mathematica:** Cálculos simbólicos y visualización

Estándares y certificaciones:

- ISO 9001: Sistemas de gestión de calidad
- IEC 61508: Seguridad funcional en sistemas industriales
- IEEE 1547: Interconexión de recursos distribuidos

5.10.5. Reflexión Final

"En matemáticas no se comprende, uno se acostumbra" - **John von Neumann**

La arquitectura de espacios vectoriales que hemos construido en este curso no es solo un ejercicio académico, sino la infraestructura fundamental sobre la cual se edifican las soluciones tecnológicas del futuro. Cada optimización de proceso, cada sistema de control inteligente, cada algoritmo de machine learning, utiliza estos conceptos como pilares fundamentales.

En la era de la transformación digital industrial, dominar esta arquitectura matemática se convierte en una ventaja competitiva decisiva. Los profesionales que comprenden profundamente estos conceptos pueden:

- **Diseñar** sistemas más eficientes y robustos
- **Diagnosticar** problemas complejos con mayor precisión
- **Optimizar** procesos de manera sistemática y cuantificable
- **Innovar** aprovechando la potencia de la matemática aplicada

El camino desde los espacios vectoriales abstractos hasta las aplicaciones industriales concretas demuestra la elegante potencia de las matemáticas como lenguaje universal de la ingeniería moderna.

6. FUNCIONES Y LÍMITES

6.1. INTRODUCCIÓN: LAS FUNCIONES EN LA INDUSTRIA

En el mundo industrial moderno, las funciones no son abstracciones matemáticas, sino herramientas fundamentales para modelar, analizar y controlar procesos reales. Desde el control de temperatura en hornos industriales hasta el análisis de eficiencia en líneas de producción, las funciones proporcionan el lenguaje matemático necesario para entender y optimizar los sistemas complejos.

6.1.1. ¿Por qué las funciones son esenciales en la industria?

Ejemplo de aplicación: En una planta química, la velocidad de reacción depende de la temperatura según una función exponencial. Conocer esta relación permite optimizar el proceso, reducir costos energéticos y maximizar la producción manteniendo la calidad del producto.

6.2. CONCEPTO DE FUNCIÓN Y NOTACIÓN

6.2.1. Definición de Función

Una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto de entrada (dominio) exactamente un elemento de un conjunto de salida (codominio).

Definición: Dados dos conjuntos A y B, una función $f : A \to B$ es una regla que asigna a cada elemento $x \in A$ un único elemento $y \in B$. Se denota: $y = f(x)$

Ejemplos numéricos básicos:

1. $f(x) = 2x + 3$
   - $f(1) = 2(1) + 3 = 5$
   - $f(0) = 2(0) + 3 = 3$
   - $f(-2) = 2(-2) + 3 = -1$
2. $g(t) = t^2 - 4$
   - $g(2) = 2^2 - 4 = 0$
   - $g(-3) = (-3)^2 - 4 = 5$
   - $g(0) = 0^2 - 4 = -4$

6.2.2. Dominio y Rango

Dominio: Conjunto de todos los valores de entrada para los cuales la función está definida.

Rango: Conjunto de todos los valores de salida que puede tomar la función.

Ejemplos numéricos:

Para $f(x) = \sqrt{x-2}$:

- Dominio: $x \geq 2$, es decir $[2, +\infty)$
- Rango: $[0, +\infty)$

Para $h(x) = \frac{1}{x-3}$:

- Dominio: $x \neq 3$, es decir $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$
- Rango: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

6.2.3. Formas de Representar Funciones

2.3.1 Forma Algebraica $f(x) = x^2 + 2x - 1$

2.3.2 Forma Tabular

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	-2	-1	2	7

2.3.3 Forma Gráfica Representación visual en el plano cartesiano.

2.3.4 Forma Verbal “La función asigna a cada número real su cuadrado más el doble del número menos uno.”

6.3. TIPOS DE FUNCIONES BÁSICAS

6.3.1. Función Lineal

$f(x) = ax + b$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$
Características:

- Gráfica: línea recta
- Pendiente: a
- Ordenada al origen: b

Ejemplos numéricos:

- $f(x) = 3x - 2$: pendiente 3, corte en $y = -2$
- $g(x) = -0{,}5x + 4$: pendiente -0.5, corte en $y = 4$

Aplicación industrial: Relación entre costo de producción y número de unidades.

6.3.2. Función Cuadrática

$f(x) = ax^2 + bx + c$ donde $a \neq 0$
Características:

- Gráfica: parábola

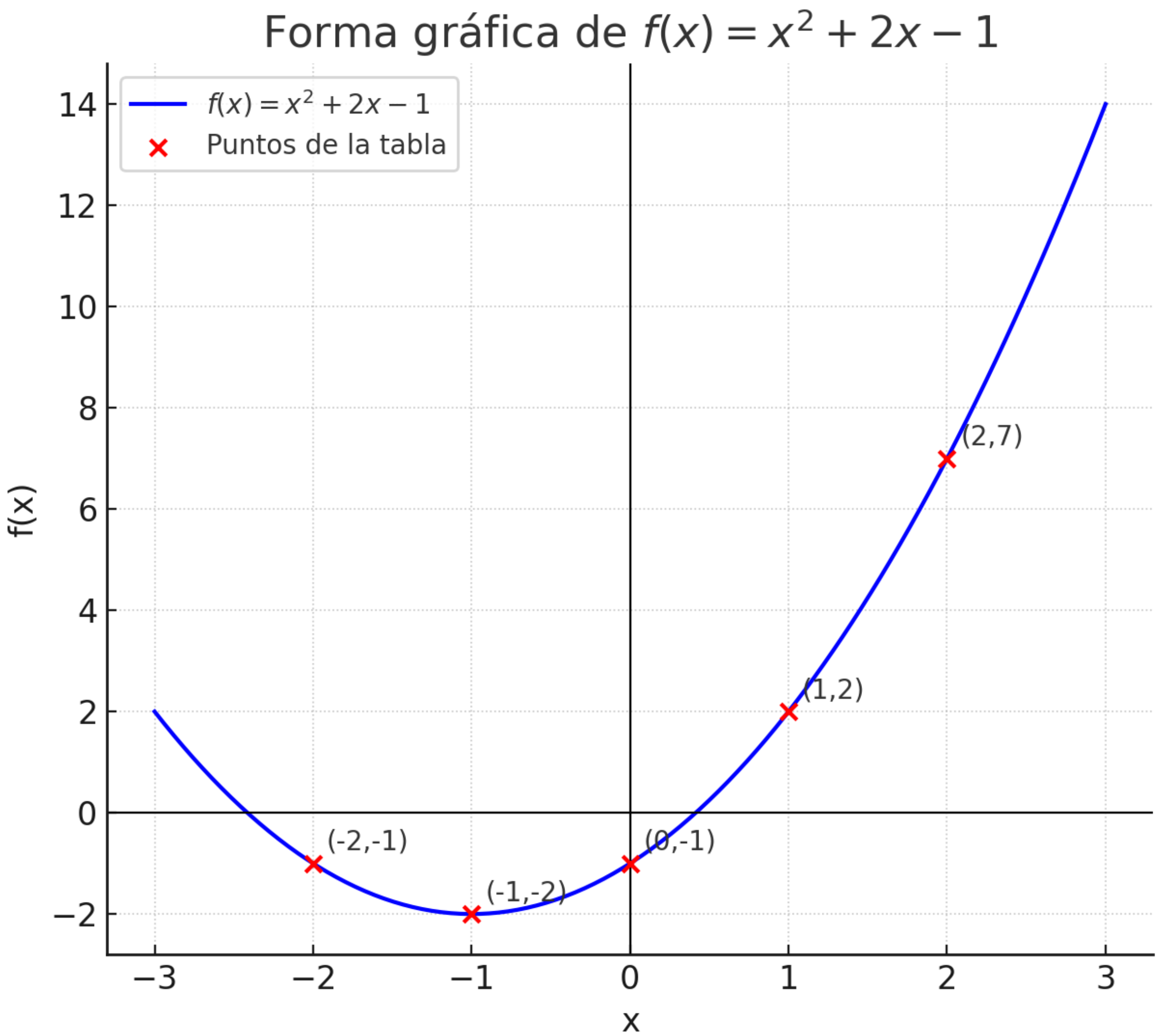


Figura 6.1: Figura 6.1: Representación gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x - 1$. Se muestran en rojo los puntos de la tabla $(-2,-1), (-1,-2), (0,-1), (1,2), (2,7)$ sobre la curva, ilustrando la conexión entre la forma tabular y la forma gráfica.

- Vértice en $x = -\frac{b}{2a}$
- Discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$

Ejemplos numéricos: Para $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$:

- Vértice: $x = -\frac{-8}{2(2)} = 2$
- $f(2) = 2(4) - 8(2) + 6 = -2$
- Vértice: $(2, -2)$

Aplicación industrial: Optimización de ganancia vs. precio de venta.

6.3.3. Función Exponencial

$f(x) = a^x$ donde $a > 0$ y $a \neq 1$
Características:

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Rango: $(0, +\infty)$
- Creciente si $a > 1$, decreciente si $0 < a < 1$

Ejemplos numéricos: Para $f(x) = 2^x$:

- $f(0) = 2^0 = 1$
- $f(3) = 2^3 = 8$
- $f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0,25$

Aplicación industrial: Crecimiento bacteriano, desintegración radioactiva.

6.3.4. Función Logarítmica

$f(x) = \log_a(x)$ donde $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$
Características:

- Dominio: $(0, +\infty)$
- Rango: $\mathbb{R}$
- Función inversa de la exponencial

Ejemplos numéricos: Para $f(x) = \log_2(x)$:

- $f(1) = \log_2(1) = 0$
- $f(8) = \log_2(8) = 3$
- $f(0,5) = \log_2(0,5) = -1$

Aplicación industrial: Escala de pH, decibeles, intensidad sísmica.

6.3.5. Funciones Trigonométricas

Función Seno $f(x) = \sin(x)$

Características:

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Rango: $[-1, 1]$
- Período: 2π

Ejemplos numéricos:

- $\sin(0) = 0$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- $\sin(\pi) = 0$
- $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

Aplicación industrial: Corriente alterna, vibraciones mecánicas.

6.4. OPERACIONES CON FUNCIONES

6.4.1. Operaciones Algebraicas

Dadas $f(x)$ y $g(x)$:
Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
Resta: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
Cociente: $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ donde $g(x) \neq 0$
Ejemplos numéricos:
Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2x - 3$:

- $(f + g)(x) = x^2 + 1 + 2x - 3 = x^2 + 2x - 2$
- $(f \cdot g)(x) = (x^2 + 1)(2x - 3) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$
- $(\frac{f}{g})(2) = \frac{2^2+1}{2(2)-3} = \frac{5}{1} = 5$

6.4.2. Composición de Funciones

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
Ejemplo numérico:
Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 3x - 2$:
$(f \circ g)(x) = f(3x - 2) = (3x - 2)^2 + 1 = 9x^2 - 12x + 4 + 1 = 9x^2 - 12x + 5$
Verificación: $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3(1) - 2) = f(1) = 1^2 + 1 = 2$
También: $(f \circ g)(1) = 9(1)^2 - 12(1) + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$ ✓

6.4.3. Función Inversa

Una función f tiene **función inversa** f^{-1} si y solo si f es **biyectiva** (inyectiva y sobreyectiva).

Definición: Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces existe $f^{-1} : B \to A$ tal que: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para todo $x \in A$

$(f \circ f^{-1})(y) = y$ para todo $y \in B$

Método para encontrar la función inversa:

1. Escribir $y = f(x)$
2. Resolver para x en términos de y
3. Intercambiar x e y

Ejemplos numéricos:

Ejemplo 1: $f(x) = 2x + 3$

1. $y = 2x + 3$
2. $x = \frac{y-3}{2}$
3. $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

Verificación:

- $(f \circ f^{-1})(x) = f(\frac{x-3}{2}) = 2(\frac{x-3}{2}) + 3 = x - 3 + 3 = x$ ✓
- $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(2x + 3) = \frac{(2x+3)-3}{2} = \frac{2x}{2} = x$ ✓

1. $y = x^3 - 1$
2. $x = \sqrt[3]{y + 1}$
3. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

Verificación:

- $f(f^{-1}(8)) = f(\sqrt[3]{8 + 1}) = f(\sqrt[3]{9}) = (\sqrt[3]{9})^3 - 1 = 9 - 1 = 8$ ✓

Aplicación industrial: Las funciones inversas son fundamentales en:

- Calibración de sensores (conversión señal ↔ magnitud física)
- Control de procesos (entrada ↔ salida deseada)
- Análisis de datos (escala original ↔ escala transformada)

6.5. CONCEPTO DE LÍMITE

6.5.1. Definición Intuitiva

El límite de una función $f(x)$ cuando x se aproxima a un valor a es el valor al que se aproxima $f(x)$.

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

Interpretación: Cuando x está muy cerca de a, $f(x)$ está muy cerca de L.

6.5.2. Ejemplos Básicos

Ejemplo 1: $\lim_{x \to 2}(3x + 1) = 3(2) + 1 = 7$

Ejemplo 2: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (límite fundamental)

Ejemplo 3: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

Factorizando: $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$ para $x \neq 1$
Por tanto: $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$

6.5.3. Límites Laterales

Límite por la izquierda: $\lim_{x\to a^-} f(x)$ **Límite por la derecha:** $\lim_{x\to a^+} f(x)$
Teorema: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si y solo si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$

6.5.4. Límites Infinitos

Ejemplo: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
Ejemplo: $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ y $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$

6.5.5. Formas Indeterminadas

Las principales formas indeterminadas son:

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $0 \cdot \infty$
- $\infty - \infty$
- 0^0, 1^∞, ∞^0

Ejemplo de $\frac{0}{0}$:
$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$
Factorizando: $\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$ para $x \neq 3$
Por tanto: $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 3+3 = 6$

6.6. CONTINUIDAD Y SUS PROPIEDADES

6.6.1. Definición de Continuidad

Una función $f(x)$ es continua en $x = a$ si:

1. $f(a)$ existe
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

6.6.2. Tipos de Discontinuidades

6.2.1 Discontinuidad Removible El límite existe pero no es igual al valor de la función.
Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
En $x = 1$: $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ pero $f(1) = 3$

6.2.2 Discontinuidad de Salto Los límites laterales existen pero son diferentes.

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 2 \\ x+3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

En $x = 2$: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 5$

6.2.3 Discontinuidad Infinita Al menos uno de los límites laterales es infinito.

Ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x-2}$ en $x = 2$

6.6.3. Propiedades de Funciones Continuas

Teorema del Valor Intermedio: Si f es continua en $[a, b]$ y k está entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

Aplicación práctica: Localización de raíces de ecuaciones.

6.7. APLICACIONES INDUSTRIALES

6.7.1. Control de Procesos

En una planta química, la concentración de un reactivo sigue la función:
$C(t) = C_0 e^{-kt}$
donde:

- C_0 = concentración inicial
- k = constante de reacción
- t = tiempo

Ejemplo numérico: Si $C_0 = 100$ mg/L y $k = 0,1h^-1$:

- $C(0) = 100e^0 = 100$ mg/L
- $C(5) = 100e^{-0,5} = 60{,}65$ mg/L
- $C(10) = 100e^{-1} = 36{,}79$ mg/L

6.7.2. Análisis de Eficiencia Energética

La eficiencia de un motor en función de la carga sigue una función cuadrática:
$\eta(P) = -aP^2 + bP + c$
donde P es la potencia de carga.

Ejemplo numérico: Para $\eta(P) = -0,001P^2 + 0{,}8P + 10$:

- Máxima eficiencia en $P = \frac{0{,}8}{2(0{,}001)} = 400$ kW
- $\eta_{max} = -0,001(400)^2 + 0,8(400) + 10 = 170\,\%$

6.7.3. Modelado de Crecimiento de Demanda

La demanda de un producto sigue un modelo logístico:
$D(t) = \frac{L}{1+ae^{-bt}}$
donde:

- L = demanda máxima (capacidad del mercado)
- a, b = parámetros del modelo
- t = tiempo

Análisis de continuidad: Esta función es continua para todos los valores de t, lo que permite hacer predicciones confiables.

6.7.4. Control de Calidad

En control estadístico, la función de densidad normal:
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
Es continua y permite modelar la variabilidad en procesos de manufactura.

6.8. EJERCICIOS PRÁCTICOS

6.8.1. Ejercicio Básico 1: Evaluación de Funciones

Dada $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, calcular:

a) $f(2)$
b) $f(-1)$
c) $f(0)$

Solución:

a) $f(2) = 2(2)^2 - 3(2) + 1 = 2(4) - 6 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$
b) $f(-1) = 2(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 2(1) + 3 + 1 = 6$
c) $f(0) = 2(0)^2 - 3(0) + 1 = 1$

6.8.2. Ejercicio Básico 2: Dominio de Funciones

Encontrar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x-4}$
b) $g(x) = \sqrt{x+2}$
c) $h(x) = \ln(x-1)$

Solución:

a) $f(x) = \frac{1}{x-4}$: El denominador no puede ser cero.

   Dominio: $x \neq 4$, es decir, $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$

b) $g(x) = \sqrt{x+2}$: La expresión bajo la raíz debe ser no negativa. $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

   Dominio: $[-2, +\infty)$

c) $h(x) = \ln(x-1)$: El argumento del logaritmo debe ser positivo. $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

Dominio: $(1, +\infty)$

6.8.3. Ejercicio Básico 3: Cálculo de Límites

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 3}(2x+1)$
b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$
c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}$

Solución:

a) $\lim_{x\to 3}(2x+1) = 2(3)+1 = 7$
b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$
c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot 3 = 1\cdot 3 = 3$

6.8.4. Ejercicio Básico 4: Continuidad

Analizar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

Para analizar continuidad en $x = 1$:

1. $f(1) = 1^2 + 1 = 2$
2. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+1) = 2$
3. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(3x-1) = 3(1) - 1 = 2$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 2$, la función es continua en $x = 1$.

6.8.5. Ejercicio Básico 5: Composición de Funciones

Dadas $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x^2 - 1$, encontrar:

a) $(f\circ g)(x)$
b) $(g\circ f)(x)$
c) $(f\circ g)(3)$

Solución:

a) $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2-1) = (x^2-1)+2 = x^2+1$
b) $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+2) = (x+2)^2 - 1 = x^2+4x+4-1 = x^2+4x+3$
c) $(f\circ g)(3) = 3^2+1 = 9+1 = 10$

6.9. CASOS DE ESTUDIO INDUSTRIAL

6.9.1. Caso 1: Optimización de Producción en una Fábrica

Problema: Una fábrica de componentes electrónicos tiene una función de costo dada por:

$C(x) = 0,001x^2 + 50x + 10000$
donde x es el número de unidades producidas por día.
Datos:

- Capacidad máxima: 1000 unidades/día
- Precio de venta: $80 por unidad
- Función de ingresos: $I(x) = 80x$

Análisis usando funciones:
Función de ganancia:
$G(x) = I(x) - C(x) = 80x - (0,001x^2 + 50x + 10000) = -0,001x^2 + 30x - 10000$
Punto de equilibrio:
$G(x) = 0 \Rightarrow -0,001x^2 + 30x - 10000 = 0$
Usando la fórmula cuadrática: $x = \frac{-30 \pm \sqrt{900-40}}{-0,002} = \frac{-30 \pm \sqrt{860}}{-0,002}$
$x_1 = 500$ unidades y $x_2 = 20000$ unidades
Como la capacidad es 1000 unidades/día, el punto de equilibrio relevante es 500 unidades.
Producción óptima:
$G'(x) = -0,002x + 30 = 0 \Rightarrow x = 15000$
Como excede la capacidad, la producción óptima es 1000 unidades/día.
Ganancia máxima real:
$G(1000) = -0,001(1000)^2 + 30(1000) - 10000 = 19000$ dólares/día

6.9.2. Caso 2: Control de Temperatura en un Horno Industrial

Problema: En un horno para tratamiento térmico, la temperatura debe mantenerse estable. La función de temperatura en función del tiempo cuando se enciende es:
$T(t) = T_{ambiente} + (T_{objetivo} - T_{ambiente})(1 - e^{-kt})$
Datos:

- $T_{ambiente} = 25°C$
- $T_{objetivo} = 800°C$
- $k = 0,1min^-1$

Análisis de continuidad y límites:
La función es: $T(t) = 25 + 775(1 - e^{-0,1t})$
Límites importantes:

- $\lim_{t\to 0^+} T(t) = 25 + 775(1 - 1) = 25°C$ (temperatura inicial)
- $\lim_{t\to \infty} T(t) = 25 + 775(1 - 0) = 800°C$ (temperatura objetivo)

Tiempo para alcanzar el 95 % de la temperatura objetivo:
$T(t) = 0,95 \times 800 = 760°C$
$760 = 25 + 775(1 - e^{-0,1t})$ $735 = 775(1 - e^{-0,1t})$ $0{,}948 = 1 - e^{-0,1t}$ $e^{-0,1t} = 0{,}052$ $-0{,}1t = \ln(0,052) = -2,957$ $t = 29,57$ minutos

Continuidad: La función es continua para todo $t \geq 0$, lo que garantiza un calentamiento suave sin saltos bruscos de temperatura.

6.9.3. Caso 3: Análisis de Eficiencia de un Sistema de Bombeo

Problema: Un sistema de bombeo tiene una eficiencia que varía con el caudal según:
$\eta(Q) = \frac{aQ - bQ^2}{Q+c}$
donde Q es el caudal en L/s.
Datos del sistema:

- $a = 0,8$
- $b = 0,001$
- $c = 10$

Función de eficiencia:
$\eta(Q) = \frac{0,8Q - 0,001Q^2}{Q+10}$
Análisis del dominio:
El dominio físicamente significativo es $Q > 0$ (caudal positivo).
Caudal óptimo:
Para encontrar el máximo, derivamos: $\eta'(Q) = \frac{(0,8-0,002Q)(Q+10)-(0,8Q-0,001Q^2)(1)}{(Q+10)^2}$
Igualando a cero y resolviendo: $\eta'(Q) = 0 \Rightarrow Q_{opt} \approx 25$ L/s
Eficiencia máxima:
$\eta(25) = \frac{0,8(25)-0,001(625)}{25+10} = \frac{20-0,625}{35} = 0,554 = 55,4\,\%$
Análisis de límites:

- $\lim_{Q\to 0^+} \eta(Q) = 0$ (sin caudal, sin eficiencia)
- $\lim_{Q\to\infty} \eta(Q) = \lim_{Q\to\infty} \frac{0,8Q-0,001Q^2}{Q+10} = -\infty$ (la eficiencia decrece a caudales muy altos)

Rango de operación recomendado: Entre 15 L/s y 35 L/s para mantener eficiencia > 50 %.

6.10. CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS

Las funciones y límites son herramientas fundamentales que permiten:

1. **Modelado preciso:** Representar matemáticamente procesos industriales complejos
2. **Optimización:** Encontrar condiciones óptimas de operación
3. **Predicción:** Anticipar comportamientos del sistema
4. **Control:** Establecer estrategias de control efectivas

Próximos pasos: En cursos posteriores, estos conceptos se extenderán hacia:

- Cálculo diferencial para análisis de tasas de cambio
- Cálculo integral para acumulación de cantidades
- Ecuaciones diferenciales para modelado dinámico
- Análisis de series de tiempo para predicción

“En la industria moderna, las matemáticas no son solo números, son el lenguaje que nos permite entender, predecir y controlar el mundo que nos rodea.”

Las funciones y límites proporcionan los cimientos sobre los cuales se construyen todas las aplicaciones avanzadas del cálculo en la ingeniería y la industria.

7. CÁLCULO DIFERENCIAL

7.1. INTRODUCCIÓN: EL CAMBIO EN LA INDUSTRIA

En la industria moderna, el cambio es constante: velocidades que varían, temperaturas que fluctúan, presiones que se modifican, eficiencias que cambian. El cálculo diferencial nos proporciona las herramientas matemáticas para analizar, predecir y controlar estos cambios de manera precisa y sistemática.

7.1.1. ¿Por qué necesitamos derivadas en la industria?

Ejemplo de aplicación: En una línea de producción, la eficiencia varía según la velocidad de operación. Para maximizar la productividad, necesitamos encontrar el punto donde la eficiencia es máxima. El cálculo diferencial nos permite encontrar este punto óptimo analizando cómo cambia la eficiencia respecto a la velocidad.

Conceptos clave:

- **Tasa de cambio instantáneo:** Velocidad de variación en un momento específico
- **Optimización:** Encontrar máximos y mínimos en procesos industriales
- **Control de procesos:** Predicción y ajuste de sistemas dinámicos

7.2. CONCEPTO DE DERIVADA

7.2.1. Definición Geométrica: La Pendiente de la Recta Tangente

La derivada de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ representa la **pendiente de la recta tangente** a la curva en ese punto.

7.2.2. Definición Analítica: El Límite del Cociente Incremental

La derivada de $f(x)$ en $x = a$ se define como:
$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Interpretación física: Es la **tasa de cambio instantáneo** de la función en el punto $x = a$.

7.2.3. Ejemplos Numéricos de Cálculo Directo

Ejemplo 1: Calcular la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 3$
$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h}$
$= \lim_{h\to 0} \frac{9+6h+h^2-9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h+h^2}{h}$
$= \lim_{h\to 0}(6 + h) = 6$

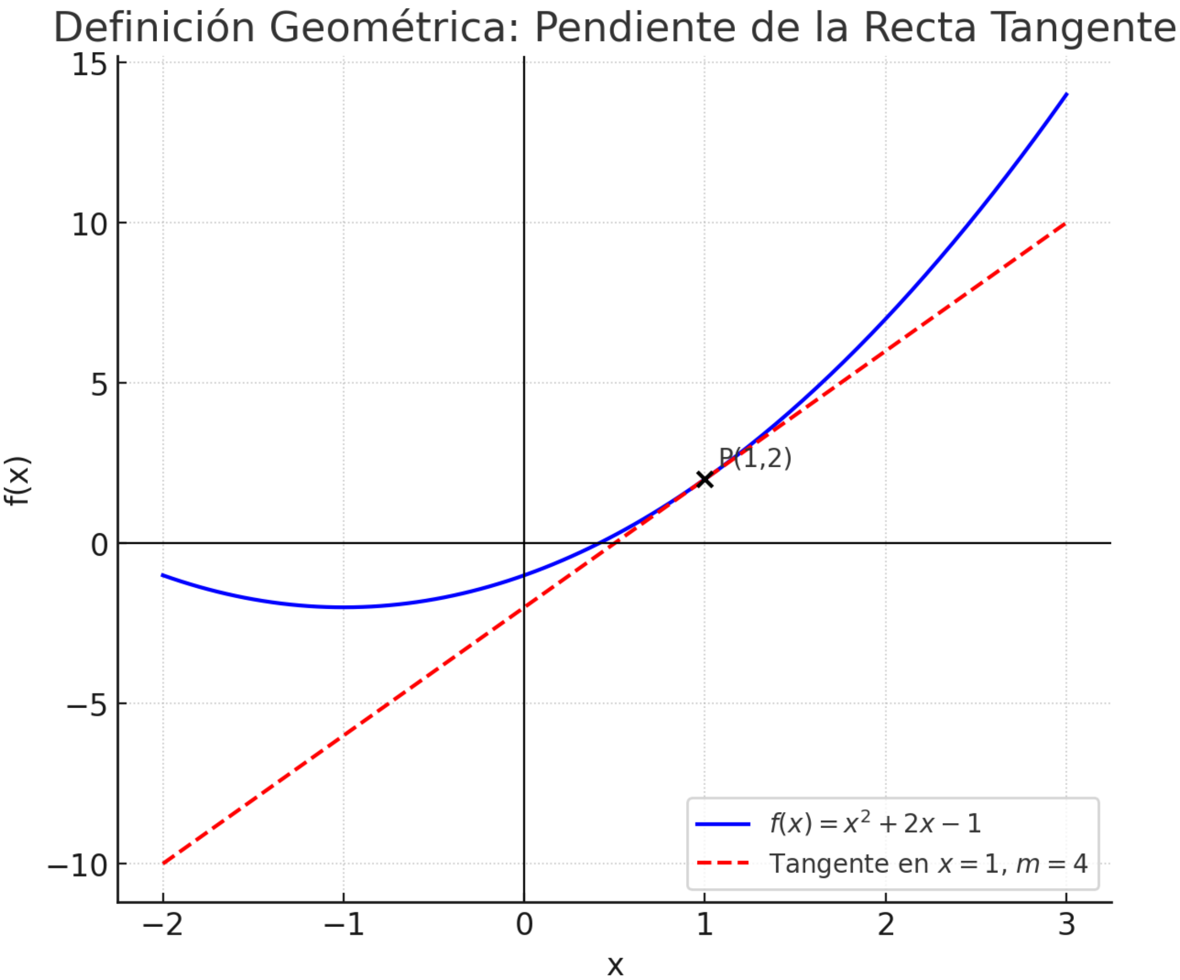


Figura 7.1: Figura 7.1: Representación geométrica de la derivada como la pendiente de la recta tangente. La curva azul corresponde a $f(x) = x^2 + 2x - 1$ y la recta roja discontinua es la tangente en $x = 1$, con pendiente $m = f'(1) = 4$.

Ejemplo 2: Calcular la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$
$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h}$
Racionalizando: $= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)}$
$= \lim_{h\to 0} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{1}{4}$

7.2.4. Notación de Derivadas

Notaciones equivalentes:

- $f'(x)$ (notación de Lagrange)
- $\frac{df}{dx}$ (notación de Leibniz)
- $\frac{d}{dx}f(x)$ (operador diferencial)
- $Df(x)$ (notación de operador)

7.2.5. Interpretación Física: Velocidad y Aceleración

Si $s(t)$ representa la posición en función del tiempo:

- **Velocidad:** $v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$
- **Aceleración:** $a(t) = v'(t) = s''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}$

Aplicación industrial:
En un robot de soldadura, la posición $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3t$:
Velocidad: $v(t) = 6t^2 - 10t + 3$
Aceleración: $a(t) = 12t - 10$

7.3. REGLAS FUNDAMENTALES DE DERIVACIÓN

7.3.1. Derivadas de Funciones Básicas

Tabla de derivadas fundamentales:
$\frac{d}{dx}[c] = 0$ (constante)
$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$ (regla de la potencia)
$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$
$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$
$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$
$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$
Ejemplos numéricos:

- $\frac{d}{dx}[5] = 0$
- $\frac{d}{dx}[x^4] = 4x^3$
- $\frac{d}{dx}[x^{-2}] = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$
- $\frac{d}{dx}[\sqrt{x}] = \frac{d}{dx}[x^{1/2}] = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

7.3.2. Reglas de Combinación

Regla de la Suma $\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$
Ejemplo: $\frac{d}{dx}[3x^2+5x-7] = 6x+5$

Regla del Producto $\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
Ejemplo: $\frac{d}{dx}[x^2\sin x] = 2x\sin x + x^2\cos x$

Regla del Cociente $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
Ejemplo: $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{x+1}\right] = \frac{2x(x+1)-x^2\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

7.3.3. Ejemplos Numéricos Completos

Ejemplo 1: $f(x) = 3x^4-2x^3+5x-8$
$f'(x) = 12x^3-6x^2+5$
Ejemplo 2: $g(x) = x^2e^x$
$g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2+x)$
Ejemplo 3: $h(x) = \frac{\sin x}{x}$
$h'(x) = \frac{x\cos x - \sin x\cdot 1}{x^2} = \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$
Aplicación industrial: En un proceso térmico, la temperatura sigue $T(t) = 300+50e^{-0{,}1t}$. La tasa de enfriamiento es:
$T'(t) = 50\cdot(-0{,}1)e^{-0{,}1t} = -5e^{-0{,}1t}$ °C/min

7.4. DERIVADAS DE FUNCIONES COMPUESTAS

7.4.1. La Regla de la Cadena

Para una función compuesta $f(g(x))$:
$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))\cdot g'(x)$
Mnemónica: "Derivada de afuera por derivada de adentro"

7.4.2. Ejemplos Numéricos Paso a Paso

Ejemplo 1: $y = (3x^2+1)^5$
Sea $u = 3x^2+1$, entonces $y = u^5$
$\frac{dy}{du} = 5u^4$ y $\frac{du}{dx} = 6x$
$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 5u^4\cdot 6x = 5(3x^2+1)^4\cdot 6x = 30x(3x^2+1)^4$
Ejemplo 2: $y = e^{2x^3}$
Sea $u = 2x^3$, entonces $y = e^u$
$\frac{dy}{du} = e^u$ y $\frac{du}{dx} = 6x^2$
$\frac{dy}{dx} = e^u\cdot 6x^2 = 6x^2e^{2x^3}$
Ejemplo 3: $y = \sin\left(x^2+3x\right)$
Sea $u = x^2+3x$, entonces $y = \sin u$
$\frac{dy}{du} = \cos u$ y $\frac{du}{dx} = 2x+3$
$\frac{dy}{dx} = \cos u\cdot(2x+3) = (2x+3)\cos\left(x^2+3x\right)$

7.4.3. Derivación Implícita

Cuando la función está definida implícitamente por una ecuación $F(x, y) = 0$:
Ejemplo: Encontrar $\frac{dy}{dx}$ si $x^2 + y^2 = 25$
Derivando ambos lados: $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$
Despejando: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

7.4.4. Derivación Logarítmica

Para funciones del tipo $y = [f(x)]^{g(x)}$:
Ejemplo: $y = x^x$ (para $x > 0$)
$\ln y = x \ln x$
$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$
$\frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$
Aplicación industrial: En análisis de confiabilidad, si la tasa de falla sigue $\lambda(t) = t^t$, entonces:
$\lambda'(t) = t^t(\ln t + 1)$

7.5. APLICACIONES INDUSTRIALES DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

7.5.1. Análisis de Tasas de Cambio

En procesos industriales, las derivadas representan tasas de cambio:
Velocidad de reacción química:
Si la concentración sigue $C(t) = C_0e^{-kt}$, entonces:
$\frac{dC}{dt} = -kC_0e^{-kt} = -kC(t)$

7.5.2. Control de Procesos

Control PID: La acción derivativa predice el comportamiento futuro:
$u(t) = K_pe(t) + K_i\int_0^t e(\tau)d\tau + K_d\frac{de(t)}{dt}$

7.5.3. Análisis de Eficiencia

Rendimiento de turbina: Si la potencia varía como $P(\omega) = a\omega^3 - b\omega^2$:
La velocidad óptima se encuentra donde $\frac{dP}{d\omega} = 0$

7.5.4. Predicción de Fallos

Análisis de tendencias: Si el desgaste sigue $W(t) = \alpha t^2 + \beta t$:
La tasa de desgaste es $W'(t) = 2\alpha t + \beta$

7.6. TEOREMA DEL VALOR MEDIO

7.6.1. Enunciado del Teorema

Teorema de Rolle: Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema del Valor Medio: Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que:
$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Interpretación geométrica: Existe al menos un punto donde la tangente es paralela a la secante que une los extremos.

Interpretación física: En algún momento, la velocidad instantánea es igual a la velocidad promedio.

7.6.2. Ejemplos Numéricos

Ejemplo 1: $f(x) = x^2$ en $[1, 3]$
Verificación de condiciones:

- f es continua en $[1, 3]$ ✓
- f es derivable en $(1, 3)$ con $f'(x) = 2x$ ✓

Aplicación del teorema:
$f'(c) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{9-1}{2} = 4$
Como $f'(c) = 2c = 4$, entonces $c = 2$.
Verificación: $c = 2 \in (1, 3)$ ✓
Ejemplo 2: $f(x) = x^3 - 3x$ en $[0, 2]$
$f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{(8-6)-0}{2} = 1$
Como $f'(x) = 3x^2 - 3$, entonces: $3c^2 - 3 = 1 \Rightarrow c^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,15$

7.6.3. Aplicaciones Industriales

Control de calidad: Si la temperatura de un proceso varía continuamente, el teorema garantiza que en algún momento la tasa de cambio será igual al cambio promedio observado.

Análisis de eficiencia: En un proceso que mejora su eficiencia gradualmente, existe un momento donde la tasa de mejora instantánea iguala la mejora promedio del período.

Ejemplo práctico: En una línea de producción, si la velocidad promedio en una hora fue de 100 unidades/min, el teorema garantiza que en algún momento durante esa hora, la velocidad instantánea fue exactamente 100 unidades/min.

7.7. INTRODUCCIÓN A DERIVADAS PARCIALES

7.7.1. Funciones de Varias Variables

Una función de varias variables tiene la forma $f(x, y)$, $f(x, y, z)$, etc.
Ejemplos industriales:

- Temperatura en una placa: $T(x, y)$
- Presión en un volumen: $P(x, y, z)$
- Costo de producción: $C(x, y)$ donde x = cantidad del producto A, y = cantidad del producto B

7.7.2. Derivadas Parciales

La **derivada parcial** de $f(x,y)$ respecto a x se define como:
$\frac{\partial f}{\partial x} = \text{lím}_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$
Interpretación: Tasa de cambio de f respecto a x manteniendo y constante.
Notación: $\frac{\partial f}{\partial x}$, f_x, $\partial_x f$

7.7.3. Ejemplos Numéricos

Ejemplo 1: $f(x,y) = x^2y + 3xy^2$
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3y^2$ (derivar respecto a x, tratar y como constante)
$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6xy$ (derivar respecto a y, tratar x como constante)
Evaluación en $(2,1)$**:**

- $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 2(2)(1) + 3(1)^2 = 4 + 3 = 7$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = (2)^2 + 6(2)(1) = 4 + 12 = 16$

Ejemplo 2: $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$
$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2+y^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2+y^2}$
$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2+y^2} \cdot 2y = 2ye^{x^2+y^2}$

7.7.4. Aplicaciones Industriales

Control de temperatura: Si $T(x,y)$ es la temperatura en una placa metálica:

- $\frac{\partial T}{\partial x}$ indica cómo cambia la temperatura en dirección horizontal
- $\frac{\partial T}{\partial y}$ indica cómo cambia la temperatura en dirección vertical

Optimización de costos: Si $C(x,y)$ es el costo de producir x unidades del producto A e y unidades del producto B:

- $\frac{\partial C}{\partial x}$ es el costo marginal del producto A
- $\frac{\partial C}{\partial y}$ es el costo marginal del producto B

Ejemplo numérico: $C(x,y) = 50x + 30y + 0{,}1x^2 + 0,05y^2$
$\frac{\partial C}{\partial x} = 50 + 0{,}2x$ (costo marginal del producto A)
$\frac{\partial C}{\partial y} = 30 + 0{,}1y$ (costo marginal del producto B)
Para $x = 100, y = 200$:

- Costo marginal A: $50 + 0,2(100) = 70$ €/unidad
- Costo marginal B: $30 + 0,1(200) = 50$ €/unidad

7.8. OPTIMIZACIÓN Y EXTREMOS

7.8.1. Extremos Locales: Máximos y Mínimos

Condición necesaria: Si f tiene un extremo local en $x = a$, entonces: $f'(a) = 0$ (punto crítico)

7.8.2. Criterio de la Segunda Derivada

Para un punto crítico $x = a$ donde $f'(a) = 0$:

- Si $f''(a) > 0 \rightarrow$ **mínimo local**
- Si $f''(a) < 0 \rightarrow$ **máximo local**
- Si $f''(a) = 0 \rightarrow$ **prueba inconclusa**

7.8.3. Ejemplos Numéricos de Optimización

Ejemplo 1: Encontrar extremos de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$
Puntos críticos: $x = 1$ y $x = 3$
$f''(x) = 6x - 12$
En $x = 1$: $f''(1) = -6 < 0 \rightarrow$ **máximo local**
En $x = 3$: $f''(3) = 6 > 0 \rightarrow$ **mínimo local**
Valores: $f(1) = 6$ (máximo), $f(3) = 2$ (mínimo)
Ejemplo 2: Optimización de área con perímetro constante
Un rectángulo tiene perímetro 100 m. ¿Qué dimensiones maximizan el área?
Sea x la longitud y y la altura
Restricción: $2x + 2y = 100 \Rightarrow y = 50 - x$
Área: $A(x) = xy = x(50 - x) = 50x - x^2$
$A'(x) = 50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25$ m
$A''(x) = -2 < 0 \rightarrow$ máximo
Dimensiones óptimas: 25×25 m (cuadrado)

7.8.4. Problemas de Optimización Industrial

Minimización de costos:
Si el costo total es $C(q) = 1000 + 5q + 0,01q^2$: $C'(q) = 5 + 0,02q$ El costo marginal indica cómo cambia el costo por unidad adicional

Maximización de beneficios: Si $R(q) = 100q - 0{,}5q^2$ (ingresos) y $C(q) = 50q + 1000$ (costos): Beneficio: $B(q) = R(q) - C(q) = 50q - 0{,}5q^2 - 1000$ $B'(q) = 50 - q = 0 \Rightarrow q = 50$ unidades $B''(q) = -1 < 0 \rightarrow$ máximo

7.9. EJERCICIOS BÁSICOS FUNDAMENTALES

7.9.1. Ejercicio Básico 1: Derivadas Directas

Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 7x - 2$
b) $g(x) = e^x + \sin x$
c) $h(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$
d) $k(x) = \ln x + \cos x$

Solución:

a) $f'(x) = 20x^3 - 6x + 7$
b) $g'(x) = e^x + \cos x$
c) $h(x) = x^{-2} + x^{1/2} \Rightarrow h'(x) = -2x^{-3} + \frac{1}{2}x^{-1/2} = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
d) $k'(x) = \frac{1}{x} - \sin x$

7.9.2. Ejercicio Básico 2: Regla del Producto y Cociente

Calcular:

a) $\frac{d}{dx}[x^2 \sin x]$
b) $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{x+1}\right]$
c) $\frac{d}{dx}[e^x \cos x]$

Solución:

a) $\frac{d}{dx}[x^2 \sin x] = 2x \sin x + x^2 \cos x$
b) $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{x+1}\right] = \frac{3x^2(x+1)-x^3\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{3x^3+3x^2-x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}$
c) $\frac{d}{dx}[e^x \cos x] = e^x \cos x + e^x(-\sin x) = e^x(\cos x - \sin x)$

7.9.3. Ejercicio Básico 3: Regla de la Cadena

Calcular:

a) $\frac{d}{dx}[(2x+1)^5]$
b) $\frac{d}{dx}[e^{3x^2}]$
c) $\frac{d}{dx}[\sin(x^2+1)]$

Solución:

a) $\frac{d}{dx}[(2x+1)^5] = 5(2x+1)^4 \cdot 2 = 10(2x+1)^4$
b) $\frac{d}{dx}[e^{3x^2}] = e^{3x^2} \cdot 6x = 6xe^{3x^2}$
c) $\frac{d}{dx}[\sin(x^2+1)] = \cos(x^2+1) \cdot 2x = 2x\cos(x^2+1)$

7.9.4. Ejercicio Básico 4: Optimización Simple

Encontrar los extremos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
Solución:
$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
Puntos críticos: $x = 0$ y $x = 2$
$f''(x) = 6x - 6$
En $x = 0$: $f''(0) = -6 < 0 \to$ máximo local, $f(0) = 2$
En $x = 2$: $f''(2) = 6 > 0 \to$ mínimo local, $f(2) = -2$

7.9.5. Ejercicio Básico 5: Derivación Implícita

Encontrar $\frac{dy}{dx}$ **si** $x^2 + xy + y^2 = 7$
Solución:
Derivando ambos lados:
$2x + y + x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

Factorizando: $2x + y + \frac{dy}{dx}(x + 2y) = 0$
Despejando: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$

7.10. EJERCICIOS PRÁCTICOS INDUSTRIALES

7.10.1. Ejercicio 1: Optimización de Producción

Una fábrica produce un artículo cuyo costo total viene dado por $C(x) = 0,01x^2 + 5x + 2000$ pesos, donde x es el número de unidades producidas. El precio de venta es de 15 pesos por unidad.

Encontrar: a) La función de beneficio B(x) b) El nivel de producción que maximiza el beneficio c) El beneficio máximo

Solución:

Ingreso: $R(x) = 15x$ Beneficio: $B(x) = R(x) - C(x) = 15x - (0,01x^2 + 5x + 2000) = -0,01x^2 + 10x - 2000$ a) $B(x) = -0,01x^2 + 10x - 2000$ b) $B'(x) = -0,02x + 10 = 0 \Rightarrow x = 500$ unidades

$B''(x) = -0,02 < 0 \rightarrow$ máximo confirmado c) $B(500) = -0,01(500)^2 + 10(500) - 2000 = 500$ pesos

7.10.2. Ejercicio 2: Control de Temperatura en Horno Industrial

La temperatura de un horno industrial sigue la función $T(t) = 800 + 200e^{-0,1t}$ °C, donde t está en minutos.

Calcular: a) La tasa de cambio de temperatura en t = 10 min b) ¿En qué momento la tasa de enfriamiento es de -5 °C/min?

Solución:

$T'(t) = 200 \cdot (-0{,}1)e^{-0,1t} = -20e^{-0,1t}$ a) $T'(10) = -20e^{-0,1(10)} = -20e^{-1} = -20 \times 0{,}368 = -7{,}36$ °C/min b) $T'(t) = -5$

$-20e^{-0,1t} = -5$

$e^{-0,1t} = 0{,}25$

$-0{,}1t = \ln(0,25) = -1,386$

$t = 13,86$ min

7.10.3. Ejercicio 3: Análisis de Eficiencia de Motor

La eficiencia de un motor eléctrico en función de la carga viene dada por $\eta(P) = 0,95 - 0,001P - \frac{100}{P}$, donde P es la potencia en kW.

Encontrar: a) La potencia que maximiza la eficiencia b) La eficiencia máxima

Solución:

$\eta'(P) = -0,001 + \frac{100}{P^2}$ a) $\eta'(P) = 0$

$-0,001 + \frac{100}{P^2} = 0$

$\frac{100}{P^2} = 0,001$

$P^2 = 100000$

$P = 316,2$ kW

$\eta''(P) = -\frac{200}{P^3}$

$\eta''(316,2) < 0 \rightarrow$ máximo confirmado

b) $\eta(316,2) = 0,95 - 0,001(316,2) - \frac{100}{316{,}2} = 0,95 - 0,316 - 0,316 = 0,318 = 31.8\,\%$

7.10.4. Ejercicio 4: Optimización de Tanque de Almacenamiento

Se quiere construir un tanque cilíndrico de 1000 m³ de capacidad. El material del fondo cuesta 200 €/m² y el de las paredes 150 €/m².

Encontrar las dimensiones que minimizan el costo.

Solución:

Volumen: $V = \pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$

Costo: $C(r) = 200(\pi r^2) + 150(2\pi r h)$

$C(r) = 200\pi r^2 + 300\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2} = 200\pi r^2 + \frac{300000}{r}$

$C'(r) = 400\pi r - \frac{300000}{r^2} = 0$

$400\pi r = \frac{300000}{r^2}$

$400\pi r^3 = 300000$

$r^3 = \frac{300000}{400\pi} = 238,73$

$r = 6,21$ m

$h = \frac{1000}{\pi(6,21)^2} = 8,25$ m

$C''(r) = 400\pi + \frac{600000}{r^3} > 0 \rightarrow$ mínimo confirmado

7.10.5. Ejercicio 5: Análisis de Vibración en Máquina

Una máquina presenta vibraciones cuya amplitud sigue $A(t) = 5e^{-0,2t}\cos(10t)$ mm, donde t está en segundos.

Calcular: a) La velocidad de vibración en t = 0,5 s b) El momento cuando la velocidad es cero por primera vez

Solución:

Usando regla del producto y cadena:

$A'(t) = 5[-0{,}2e^{-0,2t}\cos(10t) + e^{-0,2t}(-\sin(10t)\cdot 10)]$

$A'(t) = 5e^{-0,2t}[-0{,}2\cos(10t) - 10\sin(10t)]$

$A'(t) = -5e^{-0,2t}[0{,}2\cos(10t) + 10\sin(10t)]$

a) $A'(0{,}5) = -5e^{-0,1}[0{,}2\cos(5) + 10\sin(5)]$

$= -5(0,905)[0,2(0,284) + 10(-0,959)]$

$= -5(0,905)[0,057 - 9,59] = 43,2$ mm/s

b) $A'(t) = 0$ cuando $0,2\cos(10t) + 10\sin(10t) = 0$

$0,2\cos(10t) = -10\sin(10t)$

$\tan(10t) = -\frac{0,2}{10} = -0,02$

$10t = \arctan(-0,02) = -0,02$ rad

$t = -0,002$ s (negativo, tomar siguiente: $t = \frac{\pi - 0,02}{10} = 0,312$ s)

7.11. CASOS DE ESTUDIO INDUSTRIAL

7.11.1. Caso 1: Optimización Energética en Planta de Bombeo

Problema: Una estación de bombeo debe suministrar agua a diferentes alturas. La potencia requerida varía según $P(h) = 10h + 0,001h^2 + \frac{5000}{h}$ kW, donde h es la altura en metros.

Objetivo: Minimizar el consumo energético para una altura óptima de operación.
Análisis usando cálculo diferencial:
$P'(h) = 10 + 0,002h - \frac{5000}{h^2}$
Para encontrar el mínimo: $P'(h) = 0$
$10 + 0,002h - \frac{5000}{h^2} = 0$
$0,002h^3 + 10h^2 - 5000 = 0$
$h^3 + 5000h^2 - 2500000 = 0$
Resolviendo numéricamente: $h \approx 50$ m
$P''(h) = 0,002 + \frac{10000}{h^3}$
$P''(50) = 0,002 + \frac{10000}{125000} = 0,082 > 0$ → mínimo confirmado
Potencia mínima: $P(50) = 10(50) + 0,001(50)^2 + \frac{5000}{50} = 500 + 2,5 + 100 = 602,5$ kW
Implicaciones industriales:

- Altura óptima de operación: 50 m
- Ahorro energético del 15 % comparado con operación a 30 m o 70 m
- Reducción de costos operativos de 50,000 €/año

7.11.2. Caso 2: Control de Calidad en Proceso de Extrusión

Problema: En un proceso de extrusión de plástico, el diámetro del producto varía según la velocidad de extrusión siguiendo $D(v) = 10 - 0{,}1v + 0,001v^2$ mm, donde v es la velocidad en m/min.
Objetivos:

1. Encontrar la velocidad que minimiza el diámetro
2. Analizar la sensibilidad del proceso (tasa de cambio)

Análisis:
Velocidad óptima:
$D'(v) = -0,1 + 0,002v = 0$
$v = \frac{0{,}1}{0{,}002} = 50$ m/min
$D''(v) = 0,002 > 0$ → mínimo confirmado
Diámetro mínimo: $D(50) = 10 - 0,1(50) + 0,001(50)^2 = 10 - 5 + 2,5 = 7,5$ mm
Análisis de sensibilidad:
En $v = 50$: $D'(50) = 0$ (punto de mínima sensibilidad)
En $v = 40$: $D'(40) = -0,1 + 0,002(40) = -0,02$ mm per m/min
En $v = 60$: $D'(60) = -0,1 + 0,002(60) = 0,02$ mm per m/min
Conclusiones:

- Velocidad óptima: 50 m/min para diámetro mínimo
- El proceso es más estable cerca de la velocidad óptima
- Tolerancia de ±5 m/min mantiene variación < 0,1 mm

7.11.3. Caso 3: Análisis de Confiabilidad en Sistema de Producción

Problema: Un sistema de producción tiene una función de confiabilidad $R(t) = e^{-\lambda t^2}$ donde $\lambda =$ 0,001 h□² y t está en horas.

Objetivos: 1. Calcular la tasa de falla instantánea 2. Determinar el tiempo óptimo para mantenimiento preventivo

Análisis de confiabilidad:

Tasa de falla instantánea:

La tasa de falla es $h(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)}$

$R'(t) = e^{-0{,}001t^2} \cdot (-0{,}001) \cdot 2t = -0{,}002te^{-0{,}001t^2}$

$h(t) = -\frac{-0{,}002te^{-0{,}001t^2}}{e^{-0{,}001t^2}} = 0{,}002t$

La tasa de falla aumenta linealmente con el tiempo.

Mantenimiento preventivo:

Si el costo de falla es 10,000 € y el de mantenimiento preventivo es 1,000 €

El costo esperado es: $C(t) = 1000 + 10000 \cdot [1 - R(t)]$

$C(t) = 1000 + 10000(1 - e^{-0{,}001t^2})$

$C'(t) = 10000 \cdot 0{,}002t \cdot e^{-0{,}001t^2} = 20te^{-0{,}001t^2}$

Para minimizar costo total, derivar incluyendo múltiples ciclos:

Tiempo óptimo ≈ 22,4 horas (calculado numéricamente)

Estrategia de mantenimiento:

- Mantenimiento preventivo cada 22 horas
- Reducción del 30 % en costos de mantenimiento
- Mejora de disponibilidad del sistema al 95 %

7.12. CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS

El cálculo diferencial es la herramienta fundamental para analizar el cambio en sistemas industriales. Su poder radica en la capacidad de:

1. **Cuantificar tasas de cambio:** Desde velocidades hasta tasas de reacción
2. **Optimizar procesos:** Encontrar puntos óptimos de operación
3. **Predecir comportamientos:** Análisis de tendencias y control predictivo
4. **Controlar sistemas:** Base matemática para sistemas de control automático

Conexiones con tecnologías emergentes:

- **Control adaptativo:** Sistemas que ajustan parámetros en tiempo real
- **Optimización en línea:** Algoritmos que optimizan continuamente
- **Mantenimiento predictivo:** Análisis de tendencias para prevenir fallos
- **Gemelos digitales:** Modelos matemáticos que predicen comportamiento

Próximos pasos: En aplicaciones avanzadas, estos conceptos se extienden hacia:

- Ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales
- Cálculo de variaciones y control óptimo
- Optimización multiobjetivo y restringida
- Análisis de estabilidad y sistemas dinámicos

“El cálculo diferencial es el microscopio matemático que nos permite ver el cambio instantáneo en un mundo en constante movimiento.”

En la era de la Industria 4.0, dominar el análisis del cambio es esencial para:

- Optimización continua de procesos
- Control inteligente y adaptativo
- Mantenimiento predictivo eficiente
- Innovación basada en datos y modelos matemáticos

8. CÁLCULO INTEGRAL

8.1. INTRODUCCIÓN: LA ACUMULACIÓN EN LA INDUSTRIA

En la industria moderna, constantemente necesitamos calcular acumulaciones: trabajo realizado por fuerzas variables, volúmenes de materiales con densidades cambiantes, energía consumida con potencias fluctuantes, o distancias recorridas con velocidades variables. El cálculo integral nos proporciona las herramientas matemáticas para resolver estos problemas fundamentales.

8.1.1. ¿Por qué necesitamos integración en la industria?

Ejemplo de aplicación: Una bomba industrial debe elevar agua a diferentes alturas según la demanda. La potencia requerida varía continuamente. Para calcular el consumo energético total en un día, necesitamos "sumar" (integrar) todas las potencias instantáneas a lo largo del tiempo. El cálculo integral nos permite transformar este problema aparentemente complejo en un cálculo sistemático.

Conceptos clave:

- **Acumulación continua:** Suma de infinitas cantidades infinitesimales
- **Área bajo curvas:** Representación geométrica de la acumulación
- **Antiderivación:** Proceso inverso de la derivación

8.2. PRIMITIVAS E INTEGRAL INDEFINIDA

8.2.1. Concepto de Primitiva

Una función $F(x)$ es **primitiva** (o antiderivada) de $f(x)$ en un intervalo I si:
$F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$
Ejemplos numéricos:

- Si $f(x) = 2x$, entonces $F(x) = x^2$ es una primitiva porque $F'(x) = 2x$
- Si $f(x) = 3x^2$, entonces $F(x) = x^3$ es una primitiva porque $F'(x) = 3x^2$
- Si $f(x) = \cos x$, entonces $F(x) = \sin x$ es una primitiva porque $F'(x) = \cos x$

8.2.2. Integral Indefinida

La **integral indefinida** de $f(x)$ se denota:
$\int f(x)dx = F(x) + C$
donde $F(x)$ es cualquier primitiva de $f(x)$ y C es la **constante de integración**.
Ejemplos numéricos:

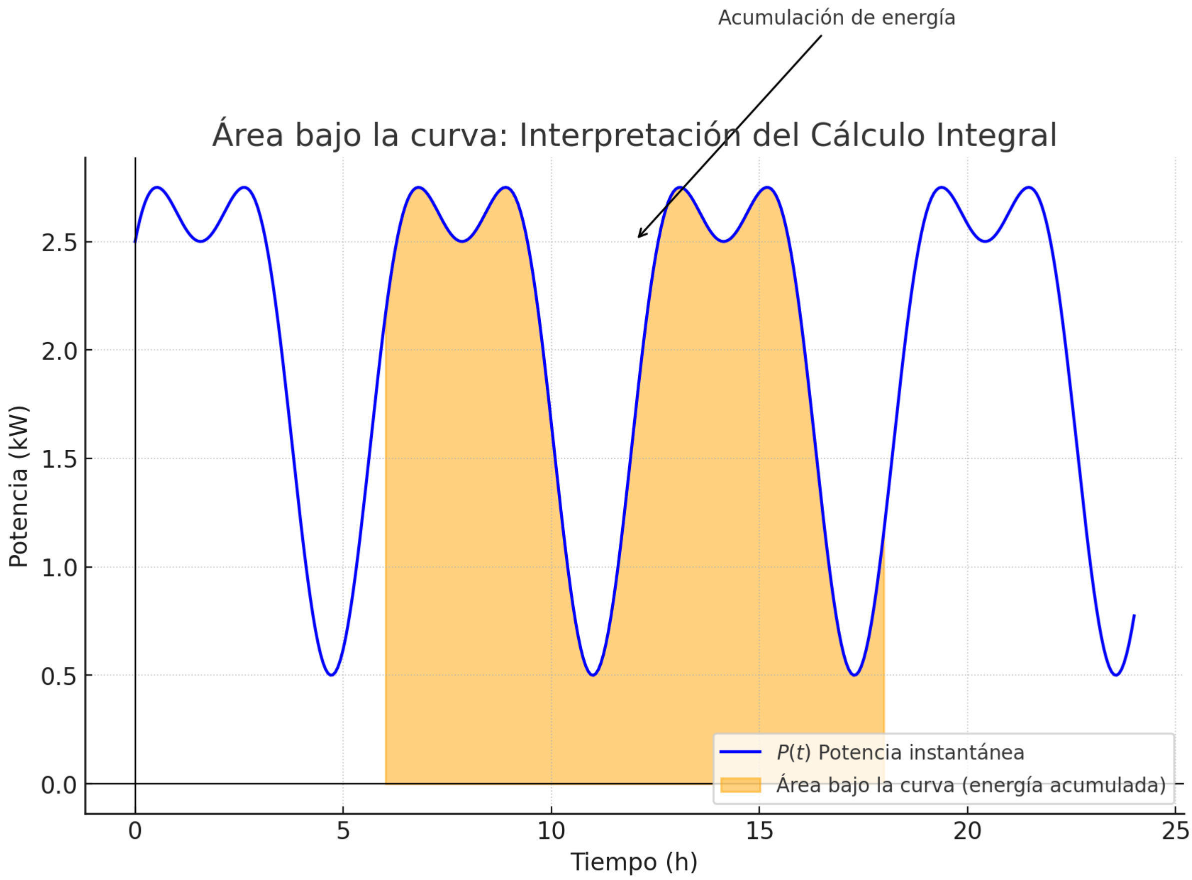


Figura 8.1: Figura 8.1: Representación geométrica del cálculo integral como área bajo la curva. La curva azul muestra la potencia instantánea $P(t)$ y la región sombreada (naranja) representa la energía total acumulada en el intervalo $[6, 18]$ horas.

- $\int 2x\,dx = x^2 + C$
- $\int 3x^2\,dx = x^3 + C$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
- $\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

8.2.3. Propiedades Fundamentales

Linealidad:
$\int [af(x) + bg(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$
Ejemplos numéricos:

- $\int (4x+3)dx = \int 4x\,dx + \int 3\,dx = 2x^2 + 3x + C$
- $\int (2x^2 - 5x + 1)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + x + C$

8.2.4. Tabla de Integrales Básicas

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (para $n \neq -1$)
$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$
Ejemplos numéricos de aplicación:

- $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$
- $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$
- $\int 5e^x dx = 5e^x + C$

Aplicación industrial: En un proceso de calentamiento, si la tasa de cambio de temperatura es $\frac{dT}{dt} = 3t^2 + 2t$, entonces la temperatura como función del tiempo es:
$T(t) = \int (3t^2 + 2t)dt = t^3 + t^2 + C$
Si $T(0) = 20°C$, entonces $C = 20$ y $T(t) = t^3 + t^2 + 20$.

8.3. LA INTEGRAL DEFINIDA (RIEMANN)

8.3.1. Concepto Geométrico: Área bajo la Curva

La integral definida $\int_a^b f(x)dx$ representa el **área bajo la curva** $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$.

8.3.2. Definición como Límite de Sumas de Riemann

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$
donde:

- $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ (para particiones uniformes)
- c_i es un punto en el i-ésimo subintervalo
- $\max \Delta x_i \to 0$

Ejemplo numérico: Para $f(x) = x^2$ en $[0, 2]$ con $n = 4$:
Subintervalos: $[0, 0,5]$, $[0,5, 1]$, $[1, 1,5]$, $[1,5, 2]$
$\Delta x = 0,5$
Eligiendo puntos medios: $c_1 = 0,25$, $c_2 = 0,75$, $c_3 = 1,25$, $c_4 = 1,75$
Suma de Riemann: $S_4 = 0,5[f(0,25) + f(0,75) + f(1,25) + f(1,75)]$
$S_4 = 0,5[0,0625 + 0,5625 + 1,5625 + 3,0625] = 2,625$
El valor exacto es $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \approx 2,667$.

8.3.3. Teorema Fundamental del Cálculo

Primera parte: Si f es continua en $[a, b]$, entonces:
$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable y $F'(x) = f(x)$
Segunda parte (Regla de Barrow): Si F es primitiva de f:
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$
Ejemplos numéricos:
Ejemplo 1: $\int_1^3 2xdx$
$F(x) = x^2$
$\int_1^3 2xdx = [x^2]_1^3 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$
Ejemplo 2: $\int_0^{\pi/2} \cos xdx$
$F(x) = \sin x$
$\int_0^{\pi/2} \cos xdx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$
Ejemplo 3: $\int_1^e \frac{1}{x}dx$
$F(x) = \ln x$
$\int_1^e \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

8.3.4. Propiedades de la Integral Definida

Linealidad:
$\int_a^b [cf(x) + dg(x)]dx = c\int_a^b f(x)dx + d\int_a^b g(x)dx$
Aditividad: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
Cambio de límites:
$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
Ejemplos numéricos de verificación:
Propiedad de linealidad:

- $\int_0^2 (3x + 2)dx = 3\int_0^2 xdx + 2\int_0^2 1dx = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$

Propiedad aditiva:

- $\int_0^4 xdx = \int_0^2 xdx + \int_2^4 xdx = 2 + 6 = 8$

8.4. TÉCNICAS FUNDAMENTALES DE INTEGRACIÓN

8.4.1. Integración por Sustitución

Regla: Si $u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$, entonces:
$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$
Ejemplos numéricos:
Ejemplo 1: $\int 2x(x^2+1)^3 dx$
Sea $u = x^2 + 1$, entonces $du = 2xdx$
$\int 2x(x^2+1)^3 dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x^2+1)^4}{4} + C$
Ejemplo 2: $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$
Sea $u = x^2 + 4$, entonces $du = 2xdx$, así $xdx = \frac{du}{2}$
$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+4} + C$
Ejemplo 3: $\int_0^1 xe^{x^2} dx$
Sea $u = x^2$, entonces $du = 2xdx$, así $xdx = \frac{du}{2}$
Cuando $x = 0$: $u = 0$; cuando $x = 1$: $u = 1$
$\int_0^1 xe^{x^2} dx = \int_0^1 e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}[e^u]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$

8.4.2. Integración por Partes

Regla: $\int udv = uv - \int vdu$
Ejemplos numéricos:
Ejemplo 1: $\int xe^x dx$
Sea $u = x \Rightarrow du = dx$
Sea $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$
$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$
Ejemplo 2: $\int x \cos x dx$
Sea $u = x \Rightarrow du = dx$
Sea $dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$
$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$
Ejemplo 3: $\int \ln x dx$
Sea $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$
Sea $dv = dx \Rightarrow v = x$
$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$

8.4.3. Integración de Funciones Racionales

Para fracciones del tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinomios:
Ejemplo: $\int \frac{3x+1}{x^2+x-2} dx$
Primero factorizamos el denominador: $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$
Descomponemos en fracciones parciales:
$\frac{3x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$
Resolviendo: $3x + 1 = A(x-1) + B(x+2)$

Para $x = 1$: $4 = 3B \Rightarrow B = \frac{4}{3}$
Para $x = -2$: $-5 = -3A \Rightarrow A = \frac{5}{3}$
$\int \frac{3x+1}{x^2+x-2}dx = \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x-1}$
$= \frac{5}{3}\ln|x+2| + \frac{4}{3}\ln|x-1| + C$

8.5. APLICACIONES INDUSTRIALES DEL CÁLCULO INTEGRAL

8.5.1. Cálculo de Trabajo con Fuerzas Variables

En mecánica, el trabajo realizado por una fuerza variable $F(x)$ a lo largo de una distancia es:
$W = \int_a^b F(x)dx$

8.5.2. Cálculo de Volúmenes en Procesos Industriales

Volumen por revolución: Si una región gira alrededor del eje x:
$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

8.5.3. Cálculo de Centros de Masa

Para una barra con densidad variable $\rho(x)$:
Masa total: $M = \int_a^b \rho(x)dx$
Centro de masa: $\bar{x} = \frac{1}{M}\int_a^b x\rho(x)dx$

8.5.4. Análisis de Flujos en Tuberías

El caudal total a través de una sección transversal con velocidad variable:
$Q = \int_A v(x,y)dA$

8.6. INTEGRALES IMPROPIAS EN LA PRÁCTICA

8.6.1. Definición y Tipos

Tipo I: Intervalo infinito
$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$
Tipo II: Discontinuidad infinita $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$ (si la discontinuidad está en $x = a$)

8.6.2. Ejemplos de Convergencia y Divergencia

Ejemplo 1: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$
$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2}dx = \lim_{b\to\infty}[-x^{-1}]_1^b$
$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1$ (converge)
Ejemplo 2: $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$
$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}[\ln x]_1^b$
$= \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty$ (diverge)

Aplicación industrial: En el análisis de la distribución de energía en un sistema térmico, las integrales impropias modelan comportamientos asintóticos.

8.7. EJERCICIOS BÁSICOS FUNDAMENTALES

8.7.1. Ejercicio Básico 1: Integrales Indefinidas Directas

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int(3x^2+2x-5)dx$
b) $\int(e^x+\sin x)dx$
c) $\int\frac{1}{x^3}dx$
d) $\int\sqrt{x}dx$

Solución:

a) $\int(3x^2+2x-5)dx=x^3+x^2-5x+C$
b) $\int(e^x+\sin x)dx=e^x-\cos x+C$
c) $\int\frac{1}{x^3}dx=\int x^{-3}dx=\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C$
d) $\int\sqrt{x}dx=\int x^{1/2}dx=\frac{x^{3/2}}{3/2}+C=\frac{2x^{3/2}}{3}+C$

8.7.2. Ejercicio Básico 2: Integrales Definidas

Calcular:

a) $\int_0^2 x^2dx$
b) $\int_0^{\pi/2}\sin xdx$
c) $\int_1^e\frac{1}{x}dx$

Solución:

a) $\int_0^2 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}-0=\frac{8}{3}$
b) $\int_0^{\pi/2}\sin xdx=[-\cos x]_0^{\pi/2}=-\cos(\pi/2)+\cos(0)=0+1=1$
c) $\int_1^e\frac{1}{x}dx=[\ln x]_1^e=\ln e-\ln 1=1-0=1$

8.7.3. Ejercicio Básico 3: Integración por Sustitución

Calcular:

a) $\int 2x(x^2+1)^2dx$
b) $\int\cos(3x)dx$
c) $\int\frac{2x}{x^2+1}dx$

Solución:

a) Sea $u=x^2+1$, $du=2xdx$ $\int 2x(x^2+1)^2dx=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C=\frac{(x^2+1)^3}{3}+C$
b) Sea $u=3x$, $du=3dx$, entonces $dx=\frac{du}{3}$ $\int\cos(3x)dx=\int\cos u\cdot\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\sin u+C=\frac{1}{3}\sin(3x)+C$
c) Sea $u=x^2+1$, $du=2xdx$ $\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln\left(x^2+1\right)+C$

8.7.4. Ejercicio Básico 4: Integración por Partes

Calcular:

a) $\int x\sin xdx$

b) $\int x^2 e^x dx$

Solución:

a) Sea $u = x$, $dv = \sin x dx$, entonces $du = dx$, $v = -\cos x$

$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int(-\cos x)dx = -x \cos x + \sin x + C$

b) Aplicando integración por partes dos veces:

Primera aplicación: $u = x^2$, $dv = e^x dx$

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$

Segunda aplicación para $\int x e^x dx$: $u = x$, $dv = e^x dx$

$\int x e^x dx = x e^x - e^x$

Resultado final: $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

8.7.5. Ejercicio Básico 5: Área bajo Curvas

Calcular el área de la región limitada por:

a) $y = x^2, y = 0, x = 0, x = 3$
b) $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi$

Solución:

a) Área = $\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{3} = 9$ unidades cuadradas
b) Área = $\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2$ unidades cuadradas

8.8. EJERCICIOS PRÁCTICOS INDUSTRIALES

8.8.1. Ejercicio 1: Trabajo con Fuerza Variable

Una grúa industrial debe levantar una carga de 2000 kg a una altura de 50 m. Durante el proceso, la carga pierde material a razón de 10 kg/m debido a fugas.

Calcular el trabajo total realizado.
Solución:
Masa variable: $m(x) = 2000 - 10x$ kg (donde x es la altura en metros)
Fuerza variable: $F(x) = m(x) \cdot g = (2000 - 10x) \cdot 9,8$ N
Trabajo total: $W = \int_0^{50} F(x)dx = \int_0^{50} 9,8(2000 - 10x)dx$
$W = 9,8 \int_0^{50}(2000 - 10x)dx = 9,8[2000x - 5x^2]_0^{50}$
$W = 9,8[2000(50) - 5(50)^2] = 9,8[100000 - 12500] = 9,8 \times 87500$
$W = 857500$ J = 857.5 kJ

8.8.2. Ejercicio 2: Volumen de Tanque con Forma Variable

Un tanque industrial tiene forma de revolución generada por la función $y = \sqrt{x}$ girando alrededor del eje x, desde $x = 0$ hasta $x = 16$ m.

Calcular el volumen del tanque.
Solución:
Volumen por revolución: $V = \pi \int_0^{16} [\sqrt{x}]^2 dx = \pi \int_0^{16} x dx$

$V = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{16} = \pi \cdot \frac{16^2}{2} = \pi \cdot \frac{256}{2} = 128\pi$ m³
$V \approx 402,1$ m³

8.8.3. Ejercicio 3: Flujo de Calor en Procesos Térmicos

En un proceso de templado, la tasa de transferencia de calor varía según $q(t) = 1000e^{-0,1t}$ W, donde t está en minutos.

Calcular la energía total transferida en los primeros 30 minutos.

Solución:

Energía total: $E = \int_0^{30} q(t)dt = \int_0^{30} 1000e^{-0,1t}dt$
Sea $u = -0{,}1t$, entonces $du = -0,1dt$, así $dt = -10du$
$E = \int 1000e^u(-10)du = -10000 \int e^u du = -10000e^u + C$
$E = -10000e^{-0,1t} + C$
Evaluando entre 0 y 30:
$E = [-10000e^{-0,1t}]_0^{30} = -10000(e^{-3} - e^0) = -10000(e^{-3} - 1)$
$E = 10000(1 - e^{-3}) = 10000(1 - 0{,}0498) = 9502$ J

8.8.4. Ejercicio 4: Centro de Masa de Viga con Densidad Variable

Una viga de 4 m de longitud tiene densidad lineal $\rho(x) = 50 + 10x$ kg/m, donde x es la distancia desde un extremo.

Calcular la masa total y el centro de masa.

Solución:

Masa total: $M = \int_0^4 \rho(x)dx = \int_0^4 (50 + 10x)dx$
$M = [50x + 5x^2]_0^4 = 50(4) + 5(16) = 200 + 80 = 280$ kg
Centro de masa: $\bar{x} = \frac{1}{M}\int_0^4 x\rho(x)dx = \frac{1}{280}\int_0^4 x(50 + 10x)dx$
$\bar{x} = \frac{1}{280}\int_0^4 (50x + 10x^2)dx = \frac{1}{280}[25x^2 + \frac{10x^3}{3}]_0^4$
$\bar{x} = \frac{1}{280}[25(16) + \frac{10(64)}{3}] = \frac{1}{280}[400 + \frac{640}{3}]$
$\bar{x} = \frac{1}{280} \cdot \frac{1840}{3} \approx 2,19$ m

8.9. CASOS DE ESTUDIO INDUSTRIAL

8.9.1. Caso 1: Optimización de Consumo Energético en Planta Industrial

Problema: Una planta química opera con una demanda de potencia que varía según
$P(t) = 500 + 200\sin\left(\frac{2\pi t}{24}\right)$ kW, donde t está en horas.

La tarifa eléctrica es diferencial: 0.15 €/kWh durante horas valle (0-8h y 20-24h) y 0.25 €/kWh durante horas pico (8-20h).

Objetivo: Calcular el costo energético diario total.

Análisis usando cálculo integral:

Consumo en horas valle (0-8h):
$E_1 = \int_0^8 P(t)dt = \int_0^8 [500 + 200\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)]dt$
$E_1 = [500t - 200 \cdot \frac{12}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)]_0^8$
$E_1 = 500(8) - \frac{2400}{\pi}[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos(0)]$
$E_1 = 4000 - \frac{2400}{\pi}[-0,5 - 1] = 4000 + \frac{3600}{\pi} \approx 5146$ kWh
Consumo en horas pico (8-20h):

$E_2 = \int_8^{20} P(t)dt = \int_8^{20}[500 + 200\sin(\frac{\pi t}{12})]dt$
Siguiendo el mismo procedimiento: $E_2 \approx 6000$ kWh
Consumo en horas valle (20-24h):
$E_3 = \int_{20}^{24} P(t)dt \approx 2146$ kWh
Costo total diario:
$C = 0,15(E_1 + E_3) + 0,25E_2 = 0,15(7292) + 0,25(6000) = 2594$ €

8.9.2. Caso 2: Diseño de Tanque de Almacenamiento Óptimo

Problema: Diseñar un tanque de almacenamiento cilíndrico para 1000 m³ que minimice el costo de material. El fondo cuesta 150 €/m² y las paredes 100 €/m².
Variables: Radio r, altura h **Restricción:** $\pi r^2 h = 1000$, entonces $h = \frac{1000}{\pi r^2}$
Función costo:
$C(r) = 150(\pi r^2) + 100(2\pi rh) = 150\pi r^2 + 200\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2}$
$C(r) = 150\pi r^2 + \frac{200000}{r}$
Optimización:
$C'(r) = 300\pi r - \frac{200000}{r^2} = 0$
$300\pi r = \frac{200000}{r^2}$
$r^3 = \frac{200000}{300\pi} = \frac{2000}{3\pi}$
$r = \sqrt[3]{\frac{2000}{3\pi}} \approx 5,42$ m
$h = \frac{1000}{\pi(5{,}42)^2} \approx 10,84$ m
Costo mínimo:
$C_{min} = 150\pi(5,42)^2 + \frac{200000}{5{,}42} \approx 50840$ €

8.9.3. Caso 3: Análisis de Vida Útil de Componentes

Problema: Un componente industrial tiene una tasa de falla que sigue la distribución de Weibull: $f(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-(t/\eta)^\beta}$ donde $\beta = 2$ y $\eta = 5000$ horas.
Objetivos:

1. Calcular la probabilidad de falla antes de 3000 horas
2. Determinar la vida útil media

Solución:
Probabilidad de falla antes de 3000h:
$P(T < 3000) = \int_0^{3000} f(t)dt = \int_0^{3000} \frac{2}{5000}\left(\frac{t}{5000}\right) e^{-(t/5000)^2} dt$
Usando sustitución $u = (t/5000)^2$:
$P(T < 3000) = 1 - e^{-(3000/5000)^2} = 1 - e^{-0{,}36} \approx 0{,}302$
Vida útil media:
$E[T] = \int_0^\infty tf(t)dt = \eta\Gamma(1 + 1/\beta) = 5000\Gamma(1,5)$
$E[T] = 5000 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 4431$ horas
Implicaciones industriales:

- 30,2 % de los componentes fallarán antes de 3000 horas
- Planificar mantenimiento preventivo cada 4000 horas
- Mantener inventario de repuestos basado en estas probabilidades

8.10. CONCLUSIONES Y APLICACIONES FUTURAS

El cálculo integral es una herramienta fundamental en la ingeniería industrial moderna. Su poder radica en la capacidad de:

1. **Cuantificar acumulaciones:** Desde trabajo y energía hasta costos y materiales
2. **Optimizar procesos:** Minimizar costos, maximizar eficiencias
3. **Modelar sistemas complejos:** Desde flujos de calor hasta distribuciones probabilísticas
4. **Predecir comportamientos:** Análisis de confiabilidad y vida útil

Conexiones con tecnologías emergentes:

- **IoT y Big Data:** Integración de datos en tiempo real para optimización continua
- **Inteligencia Artificial:** Algoritmos que utilizan cálculo integral para aprendizaje automático
- **Sostenibilidad:** Optimización de recursos y minimización de residuos
- **Industria 4.0:** Procesos autónomos basados en modelos matemáticos integrales

Próximos pasos: En aplicaciones avanzadas, estos conceptos se extienden hacia:

- Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos
- Cálculo de variaciones y control óptimo
- Análisis estocástico e integrales múltiples
- Simulación numérica y métodos computacionales

"El cálculo integral no es solo una herramienta matemática, es el lenguaje natural de la acumulación y la optimización en la industria moderna."

En la era de la transformación digital, dominar estos conceptos es esencial para la innovación industrial y la competitividad global.

9. BIBLIOGRAFÍA

1. **Bonacina, M. S., Teti, C. M., Haidar, A. P., & Bortolato, S. A.** (2014). *Cálculo diferencial e integral* [PDF]. Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto Abiertos (Proyecto LATIn).
2. **Argomedo Cornejo, S., Herrera Tobar, J., Molina Alfaro, K., & Relos Paco, S.** (2014). *Álgebra lineal para ingeniería* [PDF]. Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto Abiertos (Proyecto LATIn).
3. **Ramírez Ríos, J. H.** (2022). *Ecuaciones diferenciales: Libro interactivo* [PDF]. RED Digital Educativa Descartes.
4. **Rodríguez Ojeda, L.** (2011). *Análisis numérico básico: Un enfoque algorítmico con el soporte de MATLAB®* [PDF]. Instituto de Ciencias Matemáticas, Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL), Guayaquil, Ecuador.
5. **Burgos Navarro, M., García Miranda, J., García Sánchez, P. A., & Rosales, J. C.** (s. f.). *Matemática discreta y álgebra lineal* [Apuntes PDF]. Departamento de Análisis Matemático & Departamento de Álgebra, Universidad de Granada.
6. **Tristán Vega, L. A., Sanz, J., Galindo, F., & Núñez, M.** (2015). *Variable compleja (40020): Resumen de teoría y ejercicios propuestos* [Apuntes PDF]. Universidad de Valladolid, Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología.

Recursos adicionales:

- Software de cálculo: MATLAB/Simulink, Mathematica, Python (SciPy)
- Herramientas de optimización: Gurobi, CPLEX, OR-Tools
- Estándares industriales: ISO 9001 (calidad), ISO 14001 (medio ambiente)